Übung 17 Vektorprodukt
Rechengesetze, Komponentendarstellung, Angewandte Aufgaben

Lernziele

- wissen, wie das Vektorprodukt definiert ist.
- das Vektorprodukt zur Lösung von konkreten Problemstellungen anwenden können.
- selbstständig einen neuen Sachverhalt bearbeiten können.

Vorbemerkung

Lösen Sie die Aufgaben 1 bis 5 **komponentenfrei**, d.h. ohne Hilfe der Formel

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

1. Der Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$ des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ist definiert als Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes (vgl. Definition des Vektorproduktes im Unterricht).
Zeigen Sie, dass aus dieser Definition folgt:
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$ (φ = Zwischenwinkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

2. Überlegen Sie sich,
   a) dass das Vektorprodukt zweier Vektoren der Nullvektor ist, wenn mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist.
   b) unter welchen Bedingungen das Vektorprodukt zweier Vektoren auch dann der Nullvektor ist, wenn keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist.

3. Das **Kommutativgesetz** gilt nicht:
$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$
Zeigen Sie jedoch, dass gilt:
$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$

4. Das **Assoziativgesetz** gilt nicht:
$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$
Zeigen Sie dies an einem konkreten Beispiel. Zeichnen Sie also drei geeignete Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, anhand welcher Sie aufzeigen können, dass das Assoziativgesetz nicht gilt.

5. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sind die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Achsen in einem drei-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem.
Bestimmen Sie die nachstehenden Vektorprodukte.
Verwenden Sie dazu lediglich die Definition des Vektorproduktes (siehe Unterricht).

a)	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1$	b)	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$	c)	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3$
d)	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1$	e)	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_2$	f)	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$
g)	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$	h)	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$	i)	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_3$

6. In einem drei-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem können die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch ihre drei **Komponenten** dargestellt bzw. als Summe von Vielfachen der drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ geschrieben werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

Bestimmen Sie die Komponentendarstellung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$, d.h.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \ldots \cdot \vec{e}_1 + \ldots \cdot \vec{e}_2 + \ldots \cdot \vec{e}_3$$

Die Aufgabe besteht also darin, die folgende Formel herzuleiten (*Papula*, Formel (II-95), Seite 89):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vorgehen:

- Schreiben Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Summe von Vielfachen der Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3\right) \times \left(b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3\right)$$

- Formen Sie die rechte Seite unter Berücksichtigung der Rechenregeln um, bis die Gleichung die folgende Form hat:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \ldots \cdot \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1\right) + \ldots \cdot \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right) + \ldots + \ldots \cdot \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3\right)$$

- Benützen Sie die Ergebnisse der Aufgabe 5. Die Gleichung erhält dann die Form

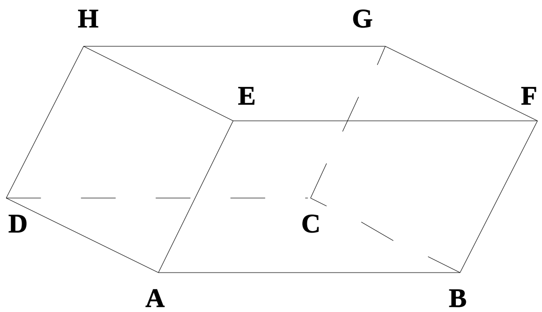
$$\vec{a} \times \vec{b} = \ldots \cdot \vec{e}_1 + \ldots \cdot \vec{e}_2 + \ldots \cdot \vec{e}_3$$

  Daraus können Sie die Komponenten von $\vec{a} \times \vec{b}$ direkt ablesen.

7. *Papula* Aufgaben

a)	131/23	b)	131/24	c)	131/25
d)	132/26	e)	132/27	f) *	132/29

8. Der Spat ABCDEFGH wird aufgespannt durch die drei Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$:



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Durch die Eckpunkte B, D und G wird eine Ebene gelegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das vom Spat aus dieser Ebene geschnitten wird

9. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Einheitsvektoren, die sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ senkrecht stehen.

10. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Vektoren, die sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht stehen, und deren Betrag halb so gross ist wie der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$.

11. Eine Pyramide bestehe aus der Basis ABC und der Spitze S:

A(2|4|-7) B(3|4|-9) C(-1|-5|5) S(8|4|8)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P, welcher auf der über S hinaus verlängerten Pyramidenhöhe liegt und von S den Abstand 7 hat.

Lösungen

1. …

2. a) …
   b) Die beiden Vektoren sind identisch oder Vielfache voneinander, d.h.: $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$ $(k \in \mathbb{R})$

3. …

4. Beispiel einer möglichen Wahl von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:
   $\vec{a}$ beliebig
   $\vec{b}$ ist irgend ein Vielfaches von $\vec{a}$, d.h. $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$ $(k \in \mathbb{R}$ beliebig)
   $\vec{c}$ steht senkrecht zu $\vec{a}$ (und damit auch zu $\vec{b}$), d.h. $\vec{c} \perp \vec{a}$ $\vec{c} \perp \vec{b}$
   $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{0}$
   $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ ist ein Vielfaches von $\vec{c}$, d.h. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda\cdot\vec{c} \neq \vec{0}$
   $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

5. a) $\vec{0}$ b) $\vec{e}_3$ c) $-\vec{e}_2$
   d) $-\vec{e}_3$ e) $\vec{0}$ f) $\vec{e}_1$
   g) $\vec{e}_2$ h) $-\vec{e}_1$ i) $\vec{0}$

6. $$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3\right) \times \left(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3\right)\\ &= a_1b_1\cdot\left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1\right) + a_1b_2\cdot\left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right) + \ldots + a_3b_3\cdot\left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3\right)\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\cdot\vec{e}_1 + (a_3b_1-a_1b_3)\cdot\vec{e}_2 + (a_1b_2-a_2b_1)\cdot\vec{e}_3\end{aligned}$$
   $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

7. siehe *Papula*
   zu d) und e): Das Spatprodukt $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ gehört nicht zu den Lernzielen des Unterrichts.
   Damit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene liegen, muss das Vektorprokukt von zwei der drei Vektoren senkrecht zum dritten Vektor stehen, also z.B. $(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = 0$

8. $A_{\Delta BDG} = \frac{1}{2}\left|\vec{BD} \times \vec{BG}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{608} = 12.3$

9. $\left.\begin{array}{l}\vec{x} = k\cdot(\vec{a} \times \vec{b})\\ |\vec{x}| = 1\end{array}\right\}$ $\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = -\frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$

10. $\left.\begin{array}{l}\vec{x} = k\cdot(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}))\\ |\vec{x}| = \frac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{b}|\end{array}\right\}$ $\vec{x}_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\20\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = -\vec{x}_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-20\\-2\end{pmatrix}$

11. $\vec{SP}$ steht senkrecht zur Pyramidenbasis, ist daher ein Vielfaches von $\vec{AB} \times \vec{AC}$ und hat Betrag 7
    $\left.\begin{array}{l}\vec{SP} = k\cdot\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right)\\ \left|\vec{SP}\right| = 7\\ \vec{OP} = \vec{OS} + \vec{SP}\end{array}\right\}$ $\vec{OP} = \begin{pmatrix}14\\6\\11\end{pmatrix}$ P(14|6|11)