

Formelsammlung

1. Algebra

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Potenzen und Wurzeln

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

2. Logarithmen

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$$

3. Funktionen und Gleichungen

Lineare Funktion

$$y = f(x) = ax + b$$

$$\text{Steigung } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Quadratische Funktion (Graf = Parabel)

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Allgemeine Form

$$y = f(x) = a(x - u)^2 + v$$

Scheitelpunktsform, Scheitelpunkt S(u|v)

Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Allgemeine Form

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exponentialfunktion

$$y = f(x) = c \cdot a^x$$

a = Wachstumsfaktor

4. Finanzmathematik

i	Zinssatz pro Zinsperiode
n	Anzahl Zinsperioden
q	Zins-/Wachstumsfaktor, $q = 1 + i$
K_0	Anfangskapital
K_n	Kapital nach n Zinsperioden
Nachschüssige Rente	Zahlungen am Ende der Zinsperiode
Vorschüssige Rente	Zahlungen am Anfang der Zinsperiode
r	Zahlung (Rate) vor/nach jeder Zinsperiode (alle Zahlungen gleich hoch)
R_n	Rentenwert nach n Zinsperioden (beginnend mit $K_0 = 0$)
R_0	Rentenanfangswert (endend mit $K_n = 0$)

Zins

Einfacher Zins

$$K_n = K_0(1 + ni) \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_n}{1 + ni} \quad i = \frac{\frac{K_n}{K_0} - 1}{n} \quad n = \frac{\frac{K_n}{K_0} - 1}{i}$$

Zinseszins

$$K_n = K_0 q^n \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_n}{q^n} \quad q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad n = \frac{\log_a\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log_a(q)}$$

$$K_n = K_0 (1 + i)^n \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \quad n = \frac{\log_a\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log_a(1 + i)}$$

i_a	Nomineller Jahres-Zinssatz
i_a^*	Effektiver Jahres-Zinssatz
m	Anzahl Zinsperioden pro Jahr

$$\Rightarrow \quad i = \frac{i_a}{m}$$

$$i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1$$

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n}$$

$$i_a = m \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right)$$

$$n = \frac{\log_a\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log_a\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)}$$

Rente

Nachschüssige Rente

$$R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R_n(q - 1)}{q^n - 1} \quad n = \frac{\log_a\left(\frac{R_n(q - 1)}{r} + 1\right)}{\log_a(q)}$$

$$R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R_0 q^n(q - 1)}{q^n - 1} \quad n = \frac{\log_a\left(\frac{r}{r - R_0(q - 1)}\right)}{\log_a(q)}$$

Vorschüssige Rente

$$R_n = rq \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R_n(q - 1)}{q(q^n - 1)} \quad n = \frac{\log_a\left(\frac{R_n(q - 1)}{rq} + 1\right)}{\log_a(q)}$$

$$R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R_0 q^{n-1}(q - 1)}{q^n - 1} \quad n = \frac{\log_a\left(\frac{rq}{rq - R_0(q - 1)}\right)}{\log_a(q)}$$

5. Differentialrechnung

Ableitung	$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	
Konstante Funktion	$f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R})$	$\Rightarrow f'(x) = 0$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{R})$	$\Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Exponentialfunktion	$f(x) = a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	$\Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
	$f(x) = e^x$	$\Rightarrow f'(x) = e^x$
	$f(x) = e^{f_1(x)}$	$\Rightarrow f'(x) = f_1'(x) \cdot e^{f_1(x)}$
Faktorregel	$f(x) = c \cdot f_1(x) \quad (c \in \mathbb{R})$	$\Rightarrow f'(x) = c \cdot f_1'(x)$
Summenregel	$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$	$\Rightarrow f'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x)$
Produktregel	$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$	$\Rightarrow f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$

6. Integralrechnung

Konstante Funktion	$\int c \, dx = cx + C$	$(c \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R})$
Potenzfunktion	$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$(n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, C \in \mathbb{R})$
	$\int x^{-1} \, dx = \ln(x) + C$	$(C \in \mathbb{R})$
Exponentialfunktion	$\int e^x \, dx = e^x + C$	$(C \in \mathbb{R})$
	$\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$	$(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, C \in \mathbb{R})$
Faktorregel	$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$	$(c \in \mathbb{R})$
Summenregel	$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) \, dx = \int f_1(x) \, dx \pm \int f_2(x) \, dx$	
Bestimmtes Integral	$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	