

## Aufgaben 16      Unbestimmtes Integral Stammfunktion, Unbestimmtes Integral, Faktor-/Summenregel

### Lernziele

- eine Stammfunktion und das unbestimmte Integral einer konstanten Funktion, einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- die Faktor- und Summenregel anwenden können, um das unbestimmte Integral einer Funktion bestimmen zu können.
- die Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können, wenn die Grenzkosten-, Grenzertrags- und die Grenzgewinnfunktion bekannt ist.

### Aufgaben

16.1 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $\int x^2 dx$           | b) $\int x^3 dx$           |
| c) $\int x^{-5} dx$        | d) $\int \frac{1}{x^2} dx$ |
| e) $\int \frac{1}{x^4} dx$ | f) $\int 4 dx$             |
| g) $\int (-7) dx$          | h) $\int e^x dx$           |
| i) $\int e^{3x} dx$        | j) $\int e^{-x} dx$        |

16.2 Bestimmen Sie das unbestimmte Integral der folgenden Funktionen f:

- |  |  |
|--|--|
| a) $f(x) = x^5$                            | b) $f(x) = 3x^2$                           |
| c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$                 | d) $f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{2}{3x^2}$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ | f) $f(x) = x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x$    |

16.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen jener beiden Stammfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  von  $f$ , welche die genannten Bedingungen erfüllen.

- |                          |              |               |
|--------------------------|--------------|---------------|
| a) $f(x) = 10x^2 + x$    | $F_1(0) = 3$ | $F_2(0) = -1$ |
| b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ | $F_1(2) = 5$ | $F_2(4) = -8$ |

16.4 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 50x + 250$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $f$ , falls ...

- |                         |
|-------------------------|
| a) ... $f(0) = 500$ .   |
| b) ... $f(10) = 2500$ . |

16.5 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung  $f''$  einer Funktion  $f$ :

$$f''(x) = 2x - 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $f$ , so dass  $f'(2) = 4$  und  $f(1) = -1$ .

16.6 Angenommen, die monatlichen Grenzkosten für ein Produkt sind  $K'(x) = (2x + 100)$  CHF, und die Fixkosten betragen 200 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion für einen Monat.

- 16.7 Angenommen, die Grenzkosten für ein Produkt sind  $K'(x) = (4x + 2)$  CHF, und die Produktion von 10 Einheiten ergeben Gesamtkosten von 300 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion.
- 16.8 Angenommen, die Grenzkosten für ein Produkt sind  $K'(x) = (4x + 40)$  CHF, und die Gesamtkosten für die Produktion von 25 Einheiten betragen 3000 CHF. Wie hoch sind die Gesamtkosten für 30 Einheiten?
- 16.9 Eine Firma weiss, dass die Grenzkosten für ein Produkt  $K'(x) = (3x + 20)$  CHF sind und dass der Grenzertrag  $E'(x) = (-5x + 44)$  CHF ist. Die Gesamtkosten für die Produktion und den Verkauf von 10 Einheiten betragen 370 CHF.

Bestimmen Sie ...

- a) ... die Gewinnfunktion  $G(x)$ .
- b) ... die Anzahl Einheiten, welche zu einem maximalen Gewinn führen.

Hinweis:

- Der Ertrag ist null, falls keine Einheit verkauft wird, also  $E(0) = 0$  CHF.

- 16.10 Angenommen, der Grenzertrag  $E'(x)$  und die Ableitung der Durchschnittskosten  $\bar{K}'(x)$  eines Unternehmens lauten wie folgt:

$$E'(x) = 400 \text{ CHF}$$

$$\bar{K}'(x) = \left( \frac{2}{15}x - 11 - \frac{10'000}{x^2} \right) \text{ CHF}$$

Aus der Produktion von 15 Einheiten resultieren Gesamtkosten von 16'750 CHF.

Bestimmen Sie

- a) ... die Gewinnfunktion  $G(x)$ .
- b) ... die Anzahl Einheiten, welche zu einem maximalen Gewinn führen.
- c) ... den maximalen Gewinn.

- 16.11 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Eine Stammfunktion einer Funktion ist ...

- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.

- b) Das unbestimmte Integral einer Funktion ist ...

- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.

- c) Falls  $f = g'$ , dann ist ...

- ...  $f$  eine Stammfunktion von  $g$ .
- ...  $g$  eine Stammfunktion von  $f$ .
- ...  $f$  das unbestimmte Integral von  $g$ .
- ...  $g$  das unbestimmte Integral von  $f$ .

**Lösungen**

16.1 a)  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$       b)  $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$   
 c)  $\int x^{-5} dx = -\frac{1}{4x^4} + C$       d)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$   
 e)  $\int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C$       f)  $\int 4 dx = 4x + C$   
 g)  $\int (-7) dx = -7x + C$       h)  $\int e^x dx = e^x + C$   
 i)  $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$       j)  $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

16.2 a)  $\int f(x) dx = \int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$   
 b)  $\int f(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C$   
 c)  $\int f(x) dx = \int (x^3 + 2x^2 - 5) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x + C$   
 d)  $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}\right) dx = \frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{3x} + C$   
 e)  $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5\right) dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + C$   
 f)  $\int f(x) dx = \int \left(x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x\right) dx = \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$

16.3 a)  $F_1(x) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$        $F_2(x) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$   
 b)  $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x - 7$        $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x - 100$

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst das unbestimmte Integral von f.
- Bestimmen Sie dann den Wert der Integrationskonstante, so dass die genannten Bedingungen erfüllt sind.

16.4 a)  $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 500$   
 b)  $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1500$

16.5 a)  $f'(x) = x^2 - x + 2$   
 b)  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{17}{6}$

16.6  $K(x) = (x^2 + 100x + 200)$  CHF

Hinweise:

- Integrieren Sie zuerst die Grenzkostenfunktion  $K'(x) \Rightarrow K(x) = (x^2 + 100x + C)$  CHF ( $C \in \mathbb{R}$ )
- Bestimmen Sie die Integrationskonstante C, indem Sie die Bedingung  $K(0) = 200$  CHF berücksichtigen  
 $\Rightarrow C = 200$

16.7  $K(x) = (2x^2 + 2x + 80)$  CHF

16.8  $K(30) = 3750$  CHF

Hinweis:

- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion  $K(x) \Rightarrow K(x) = (2x^2 + 40x + 750)$  CHF.

16.9 a)  $G(x) = (-4x^2 + 24x - 20)$  CHF

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion  $K(x)$  und die Ertragsfunktion  $E(x)$ .

$$\Rightarrow K(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 + 20x + 20\right) \text{ CHF}$$

$$E(x) = \left(-\frac{5}{2}x^2 + 44x\right) \text{ CHF}$$

- Bestimmen Sie dann die Gewinnfunktion  $G(x)$ .

b) 3 Einheiten

Hinweise:

- Die Gewinnfunktion  $G(x)$  ist eine quadratische Funktion.

- Denken Sie an den Grafen der Gewinnfunktion, wenn Sie das globale Maximum bestimmen.

16.10 a)  $G(x) = \left(-\frac{1}{15}x^3 + 11x^2 - 200x - 10'000\right)$  CHF

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Ertragsfunktion  $E(x) \Rightarrow E(x) = 400x$  CHF

- Bestimmen Sie dann die Durchschnittskostenfunktion  $\bar{K}(x)$

$$\Rightarrow \bar{K}(x) = \left(\frac{1}{15}x^2 - 11x + \frac{10'000}{x} + C\right) \text{ CHF}$$

- Bestimmen Sie dann die Gesamtkostenfunktion  $K(x)$

$$\Rightarrow K(x) = \left(\frac{1}{15}x^3 - 11x^2 + 600x + 10'000\right) \text{ CHF}$$

- Bestimmen Sie schliesslich die Gewinnfunktion  $G(x) \Rightarrow G(x) = E(x) - K(x) = \dots$

b) 100 Einheiten

Hinweise:

- Bestimmen Sie die lokalen Maxima der Gewinnfunktion  $G(x)$ .

- Prüfen Sie nach, ob eines der lokal Maxima das globale Maximum ist.

c)  $G_{\max} = G(100) = 13'333$  CHF (gerundet)

16.11 a) 2. Aussage

b) 3. Aussage

c) 2. Aussage