

Aufgaben 3

Funktion Definitionsmenge, Zielmenge, Bildmenge, Graf

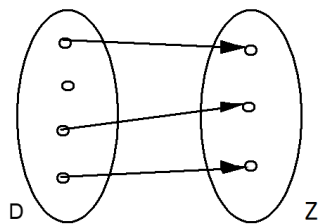
Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Relation eine Funktion ist.
- die Definitionsmenge und die Bildmenge einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.

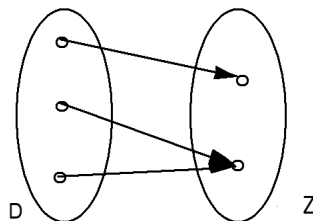
Aufgaben

3.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion ist.

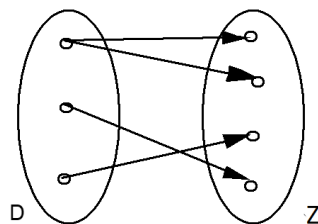
a)



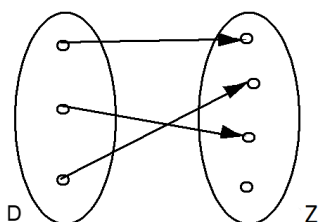
b)



c)



d)



e)

D = Menge aller Kurse im FHGR-Bachelor-Studium Tourismus
Z = Menge aller FHGR-Lehrpersonen
f: $D \rightarrow Z, k \mapsto l = f(k)$ = Lehrperson im Kurs k

- f) $D = \{1992, 1993, \dots, 2001, 2002\}$
 $Z =$ Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
 $f: D \rightarrow Z, j \mapsto m = f(j) =$ Mensch mit Jahrgang j
- g) $D =$ Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
 $Z = \{1992, 1993, \dots, 2001, 2002\}$
 $f: D \rightarrow Z, m \mapsto j = f(m) =$ Jahrgang des Menschen m
- h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^2$
- i) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) =$ Zahl, welche quadriert gleich x ergibt
Hinweis:
- \mathbb{R}^+ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen, d.h. $\mathbb{R}^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0\}$.
- j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto b = f(t) =$ Bankkontostand zum Zeitpunkt t

3.2 Bestimmen Sie die Bildmenge B der folgenden Funktionen:

- a) $D = \{\text{Januar, Februar, März, \dots, Dezember}\}$
 $Z = \{A, B, C, \dots, Z\}$
 $f: D \rightarrow Z, m \mapsto b = f(m) =$ Anfangsbuchstabe des Monats m
- b) $D =$ Menge aller Nachbarländer der Schweiz
 $Z =$ Menge aller europäischer Städte
 $h: D \rightarrow Z, x \mapsto y = h(x) =$ Hauptstadt/-ort des Nachbarlandes x
- c) Funktion f in der Aufgabe 3.1 g)
- d) Funktion f in der Aufgabe 3.1 h)

3.3 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 - x$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

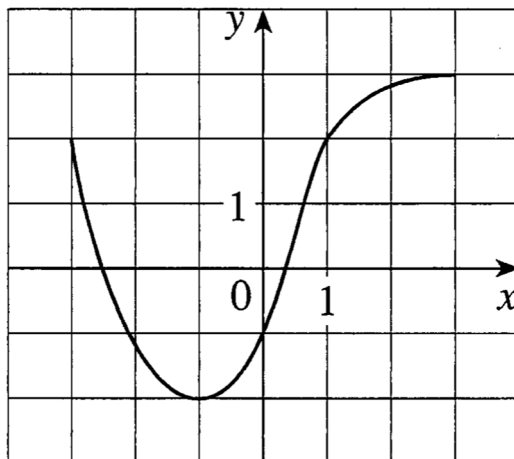
- | | | |
|--------------|---------------|------------------|
| i) $f(1)$ | ii) $f(-2)$ | iii) $f(a)$ |
| iv) $f(b^2)$ | v) $f(a - b)$ | vi) $f(x^3 - x)$ |
- b) $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

- | | | |
|--------------|---------------|-------------------------------------|
| i) $g(2)$ | ii) $g(-3)$ | iii) $g(a)$ |
| iv) $g(b^2)$ | v) $g(a - b)$ | vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$ |

3.4 (siehe nächste Seite)

3.4 Gegeben ist der Graf einer Funktion f:



- Geben Sie den Funktionswert $f(-1)$ an.
- Schätzen Sie den Funktionswert $f(2)$ ab.
- Für welche Werte von x ist $f(x) = 2$?
- Schätzen Sie alle Werte für x ab, so dass gilt: $f(x) = 0$.
- Geben Sie den Definitionsbereich (d.h. die Definitionsmenge) D von f an.
- Geben Sie den Wertebereich (d.h. die Bildmenge) B von f an.

3.5 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- Der Wertebereich (d.h. die Bildmenge) B der Funktion $f: \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x - 4}$, ist die Menge ...
 - ... $\{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\}$
 - ... $\{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } y \geq 4\}$
 - ... \mathbb{R}
 - ... \mathbb{R}_0^+
- f kann keine Funktion sein, falls ...
 - ... die Definitionsmenge von f keine Zahlenmenge ist.
 - ... die Zielmenge von f mehr Elemente enthält als die Definitionsmenge von f .
 - ... die Definitionsmenge von f mehr Elemente enthält als die Zielmenge von f .
 - ... mindestens ein Element der Definitionsmenge mehr als ein Bildelement hat.
- Wenn bei einer Funktion die Bildmenge gleich viele Elemente enthält wie die Definitionsmenge, dann kann man folgern, dass ...
 - ... die Bildmenge die gleiche Menge ist wie die Definitionsmenge.
 - ... die Zielmenge gleich viele Elemente enthält wie die Definitionsmenge.
 - ... jedes Element der Zielmenge auch ein Element der Bildmenge ist.
 - ... kein Element der Bildmenge mehr als einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wird.

Lösungen

- 3.1 a) keine Funktion
 Einem Element von D wird kein Element (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
- b) Funktion
- c) keine Funktion
 Einem Element von D werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
- d) Funktion
- e) keine Funktion
 Einigen Elementen von D werden zwei oder mehr Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
- f) keine Funktion
 Jedem Element von D werden viele Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
- g) Funktion
- h) Funktion
- i) keine Funktion
 Jedem Element von \mathbb{R}^+ werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von \mathbb{R} zugeordnet.
- j) Funktion

- 3.2 a) $B = \{A, D, F, J, M, N, O, S\}$
- b) $B = \{\text{Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}\}$
- c) $B = Z$
- d) $B = \mathbb{R}_0^+$

Hinweis:

- \mathbb{R}_0^+ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen inkl. Null, d.h. $\mathbb{R}_0^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

- 3.3 a) i) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
- ii) $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$
- iii) $f(a) = a^3 - a$
- iv) $f(b^2) = (b^2)^3 - b^2 = b^6 - b^2$
- v) $f(a - b) = (a - b)^3 - (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$
- vi) $f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

- b) i) $g(2) = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$
- ii) $g(-3) = \frac{(-3)^2}{-3+1} = -\frac{9}{2}$
- iii) $g(a) = \frac{a^2}{a+1}$
- iv) $g(b^2) = \frac{(b^2)^2}{b^2+1} = \frac{b^4}{b^2+1}$
- v) $g(a - b) = \frac{(a - b)^2}{(a - b) + 1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b + 1}$
- vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right) + 1} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

- 3.4
- a) $f(-1) = -2$
 - b) $f(2) \approx 2.8$
 - c) $x_1 = -3, x_2 = 1$
 - d) $x_1 \approx -2.5, x_2 \approx 0.3$
 - e) $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$
 - f) $B = \{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } -2 \leq y \leq 3\} = [-2, 3]$
- 3.5
- a) 4. Aussage
 - b) 4. Aussage
 - c) 4. Aussage