

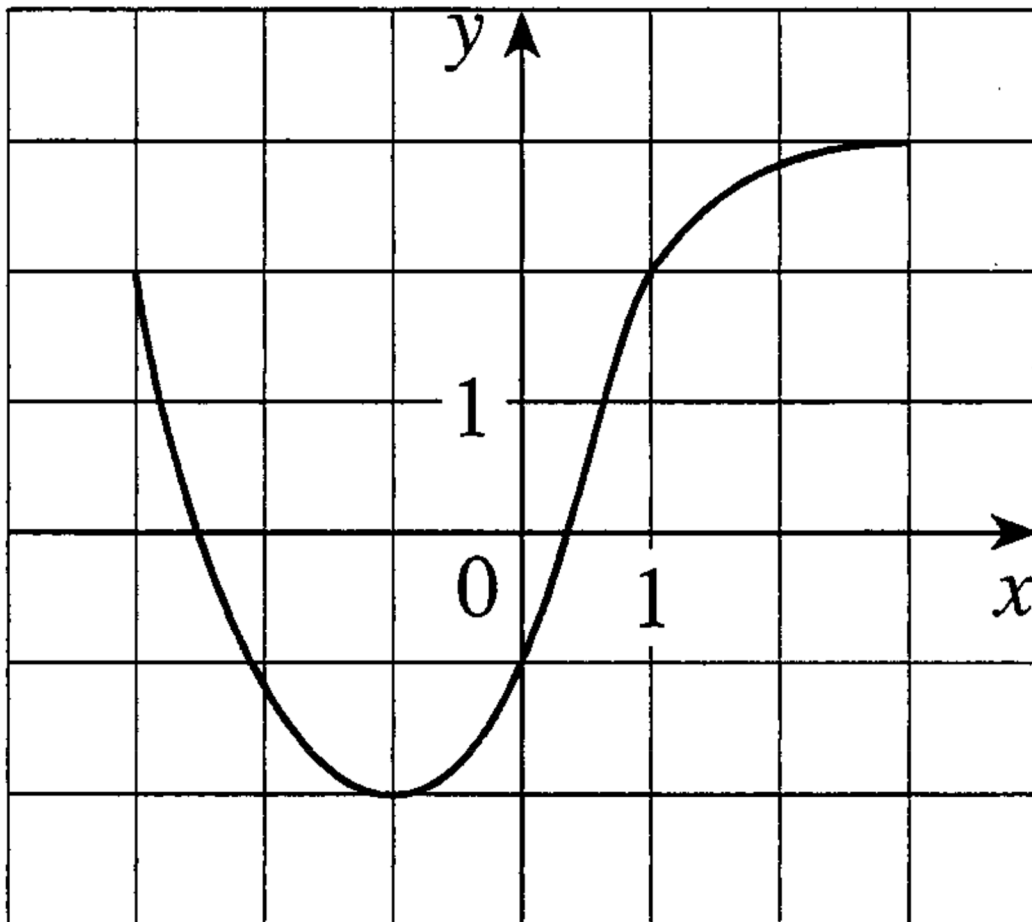
## Aufgaben 13      **Ableitung** **Ableitung (Änderungsrate), Ableitung (Ableitungsfunktion) einer** **konstanten Funktion/Potenz-/Exponentialfunktion**

### Lernziele

- eine Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion aus dem Grafen der Funktion abschätzen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer konstanten und einer linearen Funktion angeben können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer konstanten und einer linearen Funktion bestimmen können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer elementaren Polynomfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer elementaren Polynomfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.

### Aufgaben

13.1    Gegeben ist der Graf einer Funktion  $f$ :



Schätzen Sie die Ableitung (Änderungsrate)  $f'(x_0)$  an der gegebenen Stelle  $x_0$  ab:

- |               |               |
|---------------|---------------|
| a) $x_0 = -1$ | b) $x_0 = 0$  |
| c) $x_0 = 1$  | d) $x_0 = -2$ |

Hinweise:

- Zeichnen Sie die Tangente an den Grafen von  $f$  an der gegebenen Stelle  $x_0$ .
- Wählen Sie zwei beliebige Punkte auf der Tangente, und schätzen Sie ihre Koordinaten ab.
- Bestimmen Sie die Steigung der Tangente mit Hilfe der abgeschätzten Koordinaten der beiden Punkte.

13.2 Bearbeiten Sie für jede der folgenden Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \dots$  die folgenden Teilaufgaben:

- i) Zeichnen Sie den Grafen von  $f$ .
- ii) Geben Sie die Ableitung (Änderungsrate)  $f'(x_0)$  an der gegebenen Stelle  $x_0$  an.
  - a)  $f(x) = 3$   $x_0 = 2$
  - b)  $f(x) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) irgendein  $x_0 \in \mathbb{R}$
  - c)  $f(x) = 2x - 3$   $x_0 = 4$
  - d)  $f(x) = mx + q$  ( $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{R}$ ) irgendein  $x_0 \in \mathbb{R}$

Hinweis:

- Wenn der Graf einer Funktion  $f$  eine Gerade ist, dann ist die Ableitung (Änderungsrate)  $f'(x_0)$  die Steigung dieser Geraden, d.h.  $f'(x_0)$  ist an jeder Stelle  $x_0$  gleich gross, hängt also nicht von  $x_0$  ab.

13.3 Bestimmen Sie  $f'(x)$ :

- |                         |                           |  |
|-------------------------|---------------------------|--|
| a) $f(x) = 3$           | b) $f(x) = 0$             | c) $f(x) = -1$                         |
| d) $f(x) = x^3$         | e) $f(x) = x^4$           | f) $f(x) = x^5$                        |
| g) $f(x) = x^{17}$      | h) $f(x) = x^{200}$       | i) $f(x) = x^{100001}$                 |
| j) $f(x) = x^{-1}$      | k) $f(x) = x^{-2}$        | l) $f(x) = x^{-17}$                    |
| m) $f(x) = \frac{1}{x}$ | n) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | o) $f(x) = \frac{1}{x^{99}}$           |
| p) $f(x) = 3^x$         | q) $f(x) = 5^x$           | r) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ |

13.4 Bestimmen Sie die Ableitung (Änderungsrate)  $f'(x_0)$  der Funktion  $f$  an der angegebenen Stelle  $x_0$ :

- |  |                          |                           |
|--|--------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = x$                          |                          |                           |
| i) $x_0 = 0$                           | ii) $x_0 = 1$            | iii) $x_0 = -2$           |
| b) $f(x) = x^5$                        |                          |                           |
| i) $x_0 = 0$                           | ii) $x_0 = 2$            | iii) $x_0 = -\frac{2}{3}$ |
| c) $f(x) = x^{-4}$                     |                          |                           |
| i) $x_0 = -1$                          | ii) $x_0 = -\frac{4}{3}$ | iii) $x_0 = 0$            |
| d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ |                          |                           |
| i) $x_0 = 0$                           | ii) $x_0 = 1$            | iii) $x_0 = -2$           |

13.5 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  ist ...
  - ... eine reelle Zahl.
  - ... eine Funktion.
  - ... eine Tangente.
  - ... ein Graf.
- b) (siehe nächste Seite)

b) Die Ableitung (Ableitungsfunktion)  $f'$  einer Funktion  $f$  ist ...

- ... eine reelle Zahl.
- ... eine Funktion.
- ... eine Tangente.
- ... ein Graf.

c)  $f'(x_0)$  ist die Steigung der ...

- ... Sekante durch die Punkte  $(0|0)$  und  $(x_0|f(x_0))$ .
- ... Sekante durch die Punkte  $(x_0+\Delta x|f(x_0+\Delta x))$  und  $(x_0|f(x_0))$ .
- ... Tangente an den Grafen von  $f$  durch  $(x_0|f(x_0))$ .
- ... Tangente an den Grafen von  $f'$  durch  $(x_0|f(x_0))$ .

**Lösungen**

- 13.1 a)  $f'(-1) \approx 0$   
 b)  $f'(0) \approx 2$   
 c)  $f'(1) \approx \frac{3}{2}$   
 d)  $f'(-2) \approx -\frac{5}{3}$

- 13.2 a) i) ...  
 ii)  $f'(2) = 0$   
 b) i) ...  
 ii)  $f'(x_0) = 0$  an jeder Stelle  $x_0$   
 c) i) ...  
 ii)  $f'(4) = 2$   
 d) i) ...  
 ii)  $f'(x_0) = m$  an jeder Stelle  $x_0$

- |                             |                             |   |
|-----------------------------|-----------------------------|---|
| 13.3 a) $f'(x) = 0$         | b) $f'(x) = 0$              | c) $f'(x) = 0$  |
| d) $f'(x) = 3x^2$           | e) $f'(x) = 4x^3$           | f) $f'(x) = 5x^4$   |
| g) $f'(x) = 17x^{16}$       | h) $f'(x) = 200x^{199}$     | i) $f'(x) = 100'001x^{100'000}$                                     |
| j) $f'(x) = -x^{-2}$        | k) $f'(x) = -2x^{-3}$       | l) $f'(x) = -17x^{-18}$   |
| m) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ | n) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$ | o) $f'(x) = -\frac{99}{x^{100}}$                                    |
| p) $f'(x) = 3^x \ln(3)$     | q) $f'(x) = 5^x \ln(5)$     | r) $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ |

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 13.4 a) $f'(x) = 1$   | i) $f'(0) = 1$                           | ii) $f'(1) = 1$                                       | iii) $f'(-2) = 1$   |
| b) $f'(x) = 5x^4$   | i) $f'(0) = 0$                           | ii) $f'(2) = 80$                                      | iii) $f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{80}{81}$        |
| c) $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$   | i) $f'(-1) = 4$                          | ii) $f'\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{243}{256}$   | iii) $f'(0)$ ist nicht definiert<br>(Division durch null) |
| d) $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ | i) $f'(0) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ | ii) $f'(1) = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ | iii) $f'(-2) = \frac{9}{4} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$   |

- 13.5 a) 1. Aussage  
 b) 2. Aussage  
 c) 3. Aussage