

Aufgaben 15 Anwendungen der Differentialrechnung Lokale/Globale Maxima/Minima, Wendepunkte

Lernziele

- die lokalen Maxima und Minima einer Funktion bestimmen können.
- die Wendepunkte einer Funktion bestimmen können.
- das globale Maximum und das globale Minimum einer Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können.
- das globale Minimum einer Durchschnittskostenfunktion bestimmen können.

Aufgaben

15.1 Bestimmen Sie für jede Funktion ...

- i) ... die lokalen Maxima und Minima.
- ii) ... die Wendepunkte.

- a) $f(x) = x^2 - 4$
- b) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$
- c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$
- d) $f(x) = x e^{-x}$
- e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2$
- f) * $V(r) = -D \left(\frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2} \right)$ ($D > 0, a > 0$)

15.2 Angenommen, der Gesamtgewinn bei der Herstellung und dem Verkauf einer Ware beträgt

$$G(x) = (2000x + 20x^2 - x^3) \text{ CHF}$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die Stückzahl x bei maximalem Gewinn, und bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die lokalen Maxima.
- Prüfen Sie dann nach, ob eines der lokalen Maxima das globale Maximum ist.

15.3 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Dienstleistung im Zusammenhang mit einem Tourismus-Event sind gegeben durch

$$K(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 4x + 100 \right) \cdot 100 \text{ CHF}$$

wobei x ein Mass für den Umfang der Dienstleistung ist. Welcher Wert für x führt zu minimalen Durchschnittskosten? Bestimmen Sie die minimalen Durchschnittskosten.

15.4 Angenommen, die Produktionskapazität für eine bestimmte Ware kann 30 nicht überschreiten. Der Gesamtgewinn dieser Firma ist

$$G(x) = (4x^3 - 210x^2 + 3600x) \text{ CHF}$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist. Bestimmen Sie die Stückzahl x , welche den Gewinn maximiert.

15.5 (siehe nächste Seite)

15.5 Angenommen, der jährliche Gewinn eines Geschäfts ist gegeben durch

$$G(x) = (-0.1x^3 + 3x^2) \cdot 1000 \text{ CHF}$$

wobei x die Anzahl Jahre nach 2010 ist. Bestimmen Sie für diese Modellannahme den Wendepunkt für den Gewinn.

15.6 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Falls f ein lokales Maximum bei $x = x_0$ hat, kann gefolgert werden, dass ...

... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x \neq x_0$

... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x > x_0$

... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x < x_0$

... $f(x_0) > f(x)$ für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0

b) Falls $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, kann gefolgert werden, dass f ...

... kein lokales Minimum bei $x = x_0$ hat.

... kein lokales Maximum bei $x = x_0$ hat.

... keinen Wendepunkt bei $x = x_0$ hat.

... einen Wendepunkt bei $x = x_0$ hat.

c) Das globale Maximum einer Funktion ...

... ist immer ein lokales Maximum.

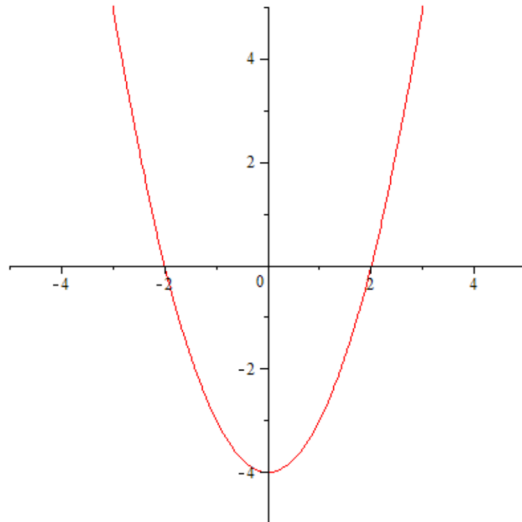
... kann ein lokales Minimum sein.

... kann ein lokales Maximum sein.

... existiert immer.

Lösungen

15.1 a) $f(x) = x^2 - 4$



$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

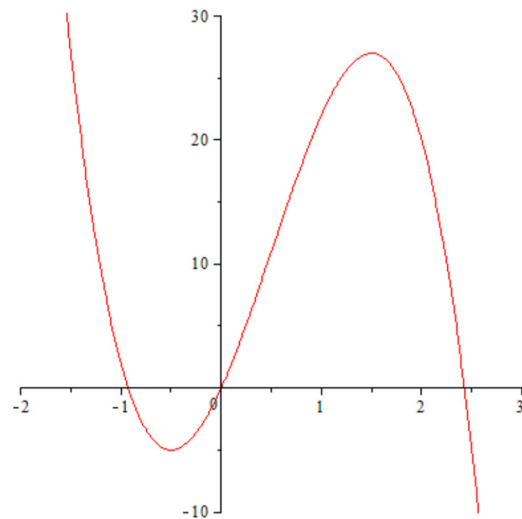
i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$
 $f''(x_1) = 2 > 0$

\Rightarrow lokales Minimum bei $x_1 = 0$
kein lokales Maximum

ii) $f''(x) = 2 \neq 0$ für alle x

\Rightarrow kein Wendepunkt

b) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$



$$f'(x) = -24x^2 + 24x + 18$$

$$f''(x) = -48x + 24$$

$$f'''(x) = -48$$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$

$$f''(x_1) = 48 > 0$$

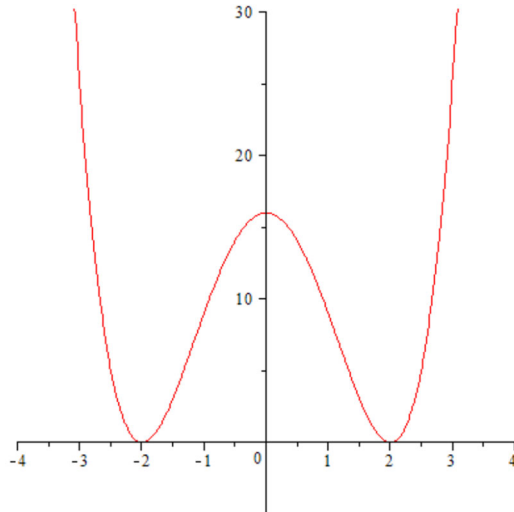
\Rightarrow lokales Minimum bei $x_1 = -\frac{1}{2}$

$$f''(x_2) = -48 < 0$$

\Rightarrow lokales Maximum bei $x_2 = \frac{3}{2}$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{1}{2}$
 $f'''(x_3) = -48 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt bei $x_3 = \frac{1}{2}$

c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$

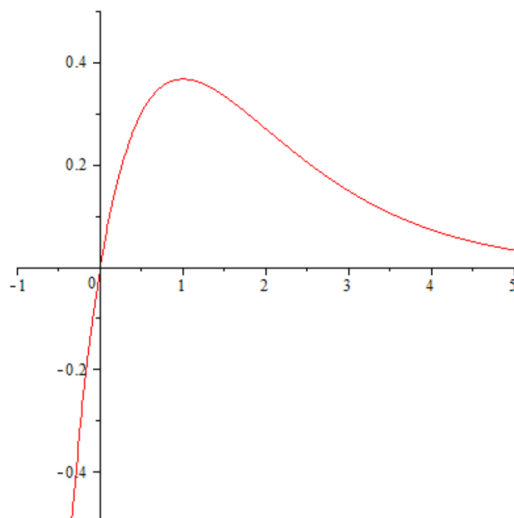


$s'(t) = 4t^3 - 16t$
 $s''(t) = 12t^2 - 16$
 $s'''(t) = 24t$

i) $s'(t) = 0$ bei $t_1 = 0, t_2 = -2$ und $t_3 = 2$
 $s''(t_1) = -16 < 0 \quad \Rightarrow$ lokales Maximum bei $t_1 = 0$
 $s''(t_2) = 32 > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum bei $t_2 = -2$
 $s''(t_3) = 32 > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum bei $t_3 = 2$

ii) $s''(t) = 0$ bei $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $s'''(t_4) = -\frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendepunkt bei $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
 $s'''(t_5) = \frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendepunkt bei $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

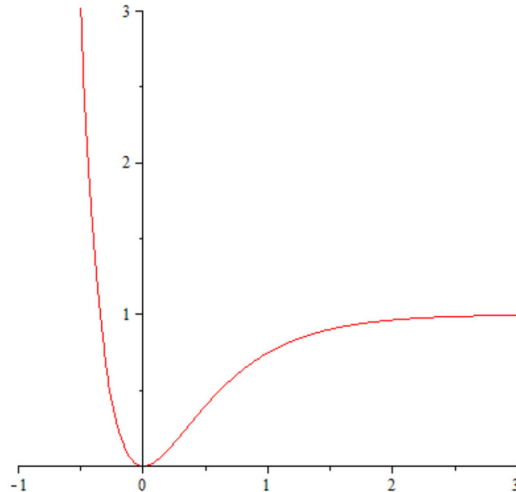
d) $f(x) = x e^{-x}$



$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}$
 $f''(x) = -e^{-x} - (1 - x) e^{-x} = (x - 2) e^{-x}$
 $f'''(x) = e^{-x} - (x - 2) e^{-x} = (3 - x) e^{-x}$

- i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 1$
 $f''(x_1) = -\frac{1}{e} < 0$ \Rightarrow lokales Maximum bei $x_1 = 1$
 kein lokales Minimum
- ii) $f''(x) = 0$ bei $x_2 = 2$
 $f'''(x_2) = \frac{1}{e^2} \neq 0$ \Rightarrow Wendepunkt bei $x_2 = 2$

e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2 = 1 - 2e^{-2x} + e^{-4x}$



$$f'(x) = 4e^{-2x} - 4e^{-4x} = 4e^{-2x}(1 - e^{-2x})$$

$$f''(x) = -8e^{-2x} + 16e^{-4x} = 8e^{-2x}(2e^{-2x} - 1)$$

$$f'''(x) = 16e^{-2x} - 64e^{-4x} = 16e^{-2x}(1 - 4e^{-2x})$$

- i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$
 $f''(x_1) = 8 > 0$ \Rightarrow lokales Minimum bei $x_1 = 0$
 kein lokales Maximum
- ii) $f''(x) = 0$ bei $x_2 = \frac{\ln(2)}{2} = 0.34\dots$
 $f'''(x_2) = -8 \neq 0$ \Rightarrow Wendepunkt bei $x_2 = 0.34\dots$

f) * $V'(r) = -D\left(-\frac{2a}{r^2} + \frac{2a^2}{r^3}\right) = \frac{2aD}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$
 $V''(r) = -D\left(\frac{4a}{r^3} - \frac{6a^2}{r^4}\right) = \frac{2aD}{r^3}\left(\frac{3a}{r} - 2\right)$
 $V'''(r) = -D\left(-\frac{12a}{r^4} + \frac{24a^2}{r^5}\right) = \frac{12aD}{r^4}\left(1 - \frac{2a}{r}\right)$

- i) $V'(r) = 0$ bei $r_1 = a$
 $V''(r_1) = \frac{2D}{a^2} > 0$ \Rightarrow lokales Minimum bei $r_1 = a$
 kein lokales Maximum
- ii) $V''(r) = 0$ bei $r_2 = \frac{3a}{2}$
 $V'''(r_2) = -\frac{64D}{81a^3} \neq 0$ \Rightarrow Wendepunkt bei $r_2 = \frac{3a}{2}$

15.2 (Einziges) **lokales** Maximum bei $x_1 = \frac{100}{3} \rightarrow 33$ oder 34

$$G(33) = 51'843 \text{ CHF}$$

$$G(34) = 51'816 \text{ CHF}$$

$G(x) < G(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein lokales Minimum gibt

$\Rightarrow G = 51'843 \text{ CHF}$ ist der **globale** maximale Gewinn bei $x = 33$.

15.3 $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \left(\frac{1}{4}x + 4 + \frac{100}{x}\right) \cdot 100 \text{ CHF}$

$\bar{K}(x)$ hat ein (einziges) **lokales** Minimum bei $x_1 = 20$.

$\bar{K}(20) = 1400 \text{ CHF}$

$\bar{K}(x) > \bar{K}(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein lokales Maximum gibt.

$\Rightarrow \bar{K} = 1400 \text{ CHF}$ sind die **globalen** minimalen Durchschnittskosten bei $x = 20$.

15.4 $G(x)$ hat ein **lokales** Maximum bei $x_1 = 15$ und ein **lokales** Minimum bei $x_2 = 20$.

$G(x_1) = 20'250 \text{ CHF}$

$G(x) < G(x_1)$ falls $x < x_1$, da es kein lokales Minimum auf dem Intervall $x < x_1$ gibt.

$G(30) = 27'000 \text{ CHF} > 20'250 \text{ CHF} (!)$

$\Rightarrow G = 27'000 \text{ CHF}$ ist der **globale** maximale Gewinn am Endpunkt $x = 30$.

15.5 $G(x)$ hat einen Wendepunkt bei $x_1 = 10$.

$G(10) = 200 \cdot 1000 \text{ CHF} = 200'000 \text{ CHF}$

\Rightarrow Wendepunkt $(10 \mid 200'000 \text{ CHF})$, d.h. wenn $x = 10$ (im Jahr 2020) und $G = 200'000 \text{ CHF}$

15.6 a) 4. Aussage

b) 3. Aussage

c) 3. Aussage