

## Aufgaben 3      Schwingungen Gedämpfte Schwingung

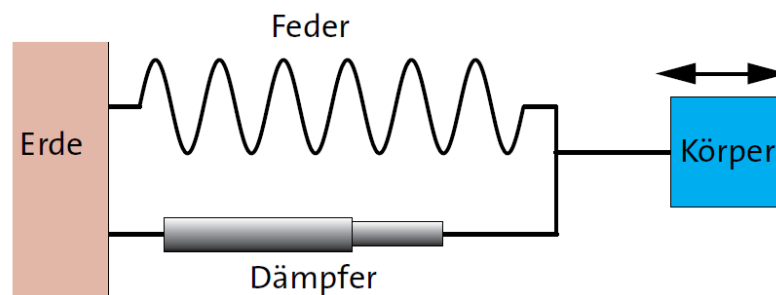
### Lernziele

- die Analogie zwischen einer Drehschwingung und einer linearen Schwingung kennen und verstehen.
- verstehen, wie eine Schwingung gedämpft werden kann.
- verstehen, wie ein mechanischer Dämpfer funktioniert.
- verstehen, dass alle natürlich ablaufenden Schwingungen gedämpft sind.
- wissen, wie die Stärke der Dämpfung die Bewegung eines Schwingers beeinflusst.
- die bei einer mechanischen, gedämpften Schwingung auftretenden Impuls- und Energieflüsse verstehen.
- wissen und verstehen, was bei einem gedämpften Schwinger der aperiodische Grenzfall ist.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

### Aufgaben

3.1 In dieser Aufgabe sollen Sie die Dynamik des gedämpften Federschwingers untersuchen.

Betrachten Sie also den folgenden gedämpften Federschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.29, Seite 18):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:

- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei  $x = 0$  liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft  $\vec{F}_F$  (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft  $\vec{F}_D$  (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

- Skizzieren Sie den Federschwinger, und zeichnen Sie die beiden Kräfte  $\vec{F}_F$  und  $\vec{F}_D$  ein. Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Fälle für die Richtungen der beiden Kräfte.
- Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des (aus der Mechanik bekannten) Aktionsprinzips.
- Beurteilen Sie, ob und wie die drei Grössen in der in b) formulierten Gleichung vom Ort  $x$ , der Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  und der Beschleunigung  $a = \dot{v} = \ddot{x}$  des Schwingkörpers abhängen.  $x$ ,  $v$  und  $a$  sind dabei die skalaren x-Komponenten des Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors. Setzen Sie dann die drei Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.
- Überprüfen Sie, dass die im Unterricht angegebene Funktion  $x = x(t)$  mit der folgenden Funktionsgleichung die in c) hergeleitete Gleichung löst:

$$x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$\text{wobei: } \delta := \frac{k}{2m}$$

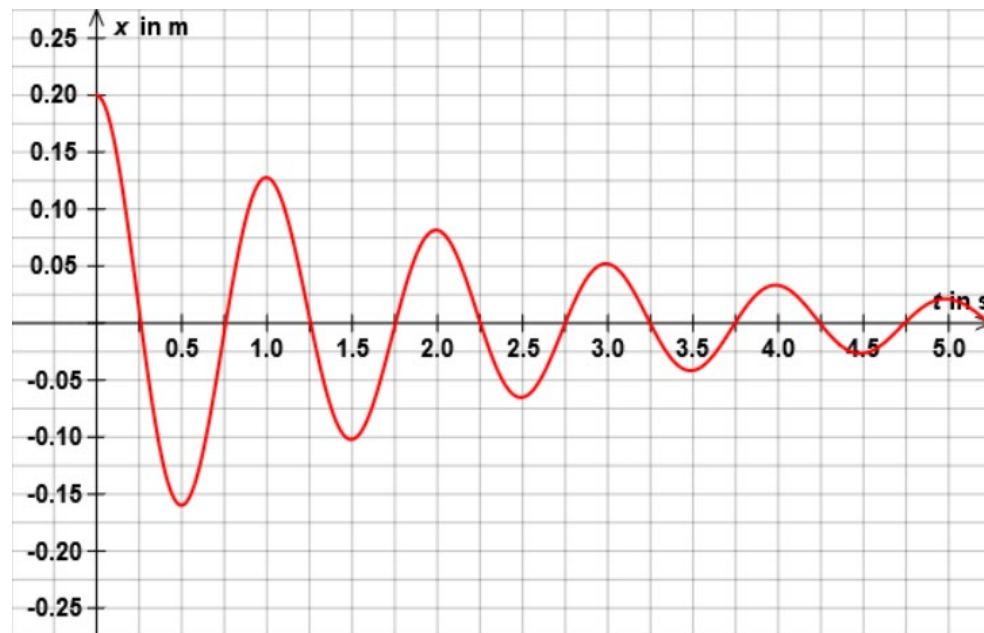
$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\delta < \omega_0, \text{ schwache Dämpfung})$$

Hinweise:

- Setzen Sie die Funktionsterme der Funktion  $x$  und deren ersten und zweiten Ableitung, d.h.  $\dot{x}(t) = \dots$ ,  $\ddot{x}(t) = \dots$  und  $\ddot{x}(t) = \dots$  in die Gleichung ein.
- Führen Sie in der so erhaltenen Gleichung einen Koeffizientenvergleich durch: Die Koeffizienten (Vorfaktoren) der auftretenden Ausdrücke  $e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$  und  $e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi)$  bzw.  $\sin(\omega_d t + \varphi)$  und  $\cos(\omega_d t + \varphi)$  (nach Division mit  $e^{-\delta t}$ ) müssen auf beiden Seiten der Gleichung je gleich sein.

- 3.2 Der Graf der Funktion  $x = x(t)$  aus der Aufgabe 3.1 d) sieht für bestimmte Zahlenwerte der Grössen  $m$ ,  $D$ ,  $k$ ,  $\hat{x}$  und  $\varphi$  für  $t \geq 0$  s wie folgt aus:



- a) Bestimmen Sie aus dem Grafen die konkreten Zahlenwerte für die Periode  $T_d$  und die Kreisfrequenz  $\omega_d$ .
- b) Bestimmen Sie aus dem Grafen die Zeitpunkte/Zeitintervalle, zu/in welchen ...
- ... in der Feder keine Energie gespeichert ist.
  - ... im Dämpfer keine Energie dissipiert wird.
  - ... im Schwingkörper kein Impuls gespeichert ist.
  - ... Impuls von der Feder in den Schwingkörper fliesst.
  - ... Impuls vom Schwingkörper in den Dämpfer fliesst.
  - ... Impuls von der Feder in die Erde fliesst.
  - ... Energie von der Feder in die Erde fliesst.
  - ... Energie in den Dämpfer fliesst.

- 3.3 Führen Sie in Moodle den [Test 3.1](#) durch.

### Lehrbuch KPK 3 (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

#### 1 Schwingungen

- 1.7 Drehschwingungen: Hin- und herfließender Drehimpuls (Seiten 15 und 16)
- 1.9 Die Dämpfung von Schwingungen (Seiten 18 bis 20)

## Lösungen

3.1 Schwingung in x-Richtung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\vec{x}} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \ddot{\vec{x}} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Die Richtungen der beiden Kräfte  $\vec{F}_F$  und  $\vec{F}_D$  hängen vom Ort  $\vec{x}$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Schwingkörpers ab.

Fälle:

- $x = 0, v > 0$  (Nulldurchgang nach rechts):  $F_F = 0, F_D < 0$  ( $\vec{F}_F = \vec{0}, \vec{F}_D$  zeigt nach links)
- $x > 0, v > 0$ :  $F_F < 0, F_D < 0$  ( $\vec{F}_F$  und  $\vec{F}_D$  zeigen nach links)
- $x > 0, v = 0$  (rechter Umkehrpunkt):  $F_F < 0, F_D = 0$  ( $\vec{F}_F$  zeigt nach links,  $\vec{F}_D = \vec{0}$ )
- $x > 0, v < 0$ :  $F_F < 0, F_D > 0$  ( $\vec{F}_F$  zeigt nach links,  $\vec{F}_D$  zeigt nach rechts)
- $x = 0, v < 0$  (Nulldurchgang nach links):  $F_F = 0, F_D > 0$  ( $\vec{F}_F = \vec{0}, \vec{F}_D$  zeigt nach rechts)
- $x < 0, v < 0$ :  $F_F > 0, F_D > 0$  ( $\vec{F}_F$  und  $\vec{F}_D$  zeigen nach rechts)
- $x < 0, v = 0$  (linker Umkehrpunkt):  $F_F > 0, F_D = 0$  ( $\vec{F}_F$  zeigt nach rechts,  $\vec{F}_D = \vec{0}$ )
- $x < 0, v > 0$ :  $F_F > 0, F_D < 0$  ( $\vec{F}_F$  zeigt nach rechts,  $\vec{F}_D$  zeigt nach links)

b)  $F_F + F_D = \dot{p}$

c)  $F_F = -D \cdot x$

$$F_D = -k \cdot v = -k \cdot \dot{x}$$

$$\dot{p} = m \cdot \dot{v} = m \cdot \ddot{x}$$

$$\Rightarrow -D \cdot x - k \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$

d) ...

3.2 a) Periode  $T_d = 1.0$  s

$$\text{Kreisfrequenz } \omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 6.3 \text{ s}^{-1}$$

- b) i) Zeitpunkte, zu welchen die Feder entspannt ist  
 $\Rightarrow$  Zeitpunkte, zu welchen für den Ort  $x$  des Schwingkörpers gilt:  $x = 0$  m  
 $\Rightarrow$  Zeitpunkte, zu welchen der Graf die Zeitachse schneidet  
 $\Rightarrow t = 0.25$  s,  $0.75$  s,  $1.25$  s, ...
- ii) Zeitpunkte, zu welchen der Schwingkörper in Ruhe ist  
 $\Rightarrow$  Zeitpunkte, zu welchen für die Geschwindigkeit  $v$  des Schwingkörpers gilt:  $v = 0$  m/s  
 $\Rightarrow$  Zeitpunkte, zu welchen der Graf ein lokales Maximum/Minimum annimmt  
 $\Rightarrow t = 0.0$  s,  $0.5$  s,  $1.0$  s, ...
- iii) gleiche Zeitpunkte wie in ii)
- iv) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestaucht, d.h. weder entspannt noch gestreckt ist  
 $\Rightarrow$  Zeitintervalle, in welchen für den Ort  $x$  des Schwingkörpers gilt:  $x < 0$  m  
 $\Rightarrow$  Zeitintervalle, in welchen der Graf unterhalb der Zeitachse verläuft  
 $\Rightarrow 0.25$  s  $< t < 0.75$  s,  $1.25$  s  $< t < 1.75$  s,  $2.25$  s  $< t < 2.75$  s, ...
- v) Zeitintervalle, in welchen sich der Schwingkörper in die positive Richtung bewegt  
 $\Rightarrow$  Zeitintervalle, in welchen für die Geschwindigkeit  $v$  des Schwingkörpers gilt:  $v > 0$  m/s  
 $\Rightarrow$  Zeitintervalle, in welchen der Graf nach oben verläuft  
 $\Rightarrow 0.5$  s  $< t < 1.0$  s,  $1.5$  s  $< t < 2.0$  s,  $2.5$  s  $< t < 3.0$  s, ...
- vi) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestreckt, d.h. weder entspannt noch gestaucht ist  
 $\Rightarrow$  Zeitintervalle, in welchen für den Ort  $x$  des Schwingkörpers gilt:  $x > 0$  m  
 $\Rightarrow$  Zeitintervalle, in welchen der Graf oberhalb der Zeitachse verläuft  
 $\Rightarrow 0.0$  s  $< t < 0.25$  s,  $0.75$  s  $< t < 1.25$  s,  $1.75$  s  $< t < 2.25$  s, ...

- vii) nie
- viii) Zeitintervalle, in welchen im Dämpfer Energie dissipiert wird  
⇒ Zeitintervalle zwischen den in ii) bestimmten Zeitpunkten

3.3 -