# Aufgaben 7 Wellen
# Energietransport, Wellengleichung

## Lernziele

- wissen und verstehen, wie die Energiestromdichte und die Intensität definiert sind.
- den Zusammenhang zwischen der Intensität und der Amplitude einer Schwingungsgrösse kennen und anwenden können.
- für eine von einem punktförmigen Sender abgestrahlte Welle den Zusammenhang zwischen der Intensität und dem Abstand vom Sender kennen und verstehen.
- die allgemeine Form einer eindimensionalen Wellenfunktion kennen und verstehen.
- die eindimensionale Wellengleichung kennen und verstehen.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

## Aufgaben

*Energietransport*

7.1 In einem als punktförmig betrachteten Sender wird eine harmonische Welle angeregt und ausgesendet. Der Sender sendet also eine in alle Richtungen gleichverteilte Kugelwelle aus. Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen.

a) Die über die Zeit gemittelte Sendeleistung sei 100 W. Bestimmen Sie ...

i) ... die in 60 s abgestrahlte Energie.

ii) ... die Intensität der Welle 4.50 m vom Sender entfernt.

Hinweise:
- Die Sendeleistung gibt an, wieviel Energie der Sender mit der Welle pro Zeiteinheit abstrahlt.
- Die mittlere Sendeleistung $\bar{P}$ ist gleich gross wie die mittlere Energiestromstärke $\bar{I}_W$ durch eine den Sender umgebende Kugeloberfläche.

b) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob und wie die Amplitude $\hat{y}$ und die Intensität I der Welle vom Abstand r vom Sender abhängt.

Hinweise:
- Überlegen Sie sich, wie sich die mit der Welle ausbreitende Energie auf dem Wellenträger räumlich verteilt.
- Überlegen Sie sich, wie der Flächeninhalt einer Wellenfront vom Abstand vom Sender abhängt.
- Nehmen Sie an, dass die Welle auf ihrem Weg auf dem Wellenträger keine Energie verliert, d.h. dass keine Energie absorbiert wird.

c) Bestimmen Sie, um welchen Faktor die Entfernung zum Sender vergrössert werden müsste, um die Intensität …

i) … auf die Hälfte zu reduzieren.

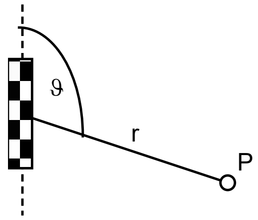
ii) … auf einen Drittel zu reduzieren.

iii) … auf einen Viertel zu reduzieren.

7.2 (siehe nächste Seite)

7.2 Eine Mobilfunktantenne strahlt eine elektromagnetische Welle ab.

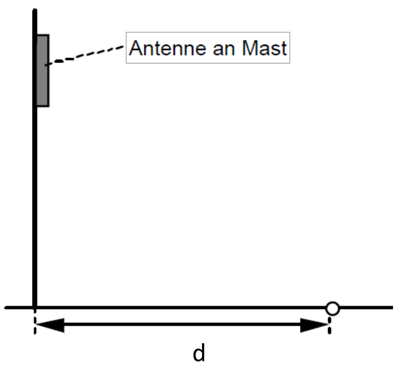
Die Intensität I der abgestrahlten elektromagnetischen Welle an einem bestimmten Ort P hängt von der Sendeleistung ab. Sie hängt aber auch vom Abstand r zur Antenne, vom Winkel $\vartheta$ zur Antennenachse sowie von der Frequenz der elektromagnetischen Welle ab.




Falls der Abstand r viel grösser ist als die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle, gilt bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung (ohne Herleitung):

$$I \sim \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2}$$

Eine Mobilfunkantenne sei mit vertikaler Ausrichtung der Antennenachse an einem Mast in horizontalem Gelände montiert:




Bestimmen Sie die Entfernung d vom Fusse der Antenne, in welcher die Intensität (bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung) maximal ist.

Hinweise:
- Überlegen Sie sich, wie die Grössen $\vartheta$ und r von d abhängen, damit Sie die Intensität I als Funktion der alleinigen Variablen d ausdrücken können, d.h. I = I(d).
- Betrachten Sie das folgende rechtwinklige Dreieck:
  Antenne – Fusspunkt des Antennenmastes – Punkt am Boden im Abstand d.
- Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion I = I(d).

*Wellengleichung*

7.3 Die folgende Funktion y beschreibt eine eindimensionale harmonische Welle, welche sich in die positive x-Richtung fortbewegt:

$$y(x,t) = \hat{y}\,\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion y die folgende Form aufweist:

$$y(x,t) = f(z) = f(x - vt) \qquad (z := x - vt)$$

Hinweise :
- Klammern Sie im Argument der Sinus-Funktion den Faktor k aus.
- Überlegen Sie sich, wie die Grössen k, $\omega$ und v zusammenhängen.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion y die folgende partielle Differentialgleichung, die sogenannte Wellengleichung, erfüllt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

7.4 Zeigen Sie, dass jede Funktion y der Form

$$y(x,t) = f(z) = f(x - vt) \qquad (z := x - vt)$$

die folgende partielle Differentialgleichung, die sogenannte Wellengleichung, erfüllt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

Hinweis:
- Beim Ableiten der Funktion y benötigt man die Kettenregel:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \ldots$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \ldots$$

7.5 Führen Sie in Moodle den Test 7.1 durch.

**Lehrbuch KPK 3** (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

4 Wellen

4.8 Energietransport mit Wellen (Seiten 44 und 45)

**Lösungen**

7.1 a) i) Abgestrahlte Energie $W = \bar{I}_W \cdot \Delta t = \bar{P} \cdot \Delta t = 100\ \text{W} \cdot 60\ \text{s} = 6.0\ \text{kJ}$

ii) Intensität $I = \frac{\bar{I}_W}{A} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2} = \frac{100\ \text{W}}{4\pi(4.50\ \text{m})^2} = 0.39\ \text{W/m}^2$

b) $A(r)$ := Flächeninhalt einer Wellenfront im Abstand r vom Sender, $[A(r)] = \text{m}^2$

Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen, deren Flächeninhalte A mit zunehmendem Abstand r vom Sender zunehmen.

$A(r) = 4\pi r^2$
$\Rightarrow\ A(r) \sim r^2$

$I_W$ := Energiestromstärke durch eine Kugeloberfläche im Abstand r vom Sender, $[I_W] = \text{W}$
$\bar{I}_W$ := zeitlicher Mittelwert von $I_W$
$I(r)$ := Intensität der Welle im Abstand r vom Sender, $[I(r)] = \text{W/m}^2$

$\bar{I}_W = I(r) \cdot A(r)$
$\bar{I}_W$ ist unabhängig von r, da keine Energie absorbiert wird.

$\Rightarrow\ I(r) \sim \frac{1}{r^2}$

$I(r) \sim (\hat{y}(r))^2$

$\Rightarrow\ \hat{y}(r) \sim \frac{1}{r}$

c) $\bar{I}_W = I \cdot A$ (siehe b))
$A \sim r^2$
----------------------
$\Rightarrow\ r^2 \sim A = \frac{\bar{I}_W}{I} \sim \frac{1}{I}$
$\Rightarrow\ r \sim \frac{1}{\sqrt{I}}$

i) Halbierung von I
$\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ Vergrösserung von r um den Faktor $\sqrt{2}$

ii) Drittelung von I
$\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ Vergrösserung von r um den Faktor $\sqrt{3}$

iii) Viertelung von I
$\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{4} = 2$
$\Rightarrow$ Vergrösserung von r um den Faktor 2, d.h. Verdoppelung von r

7.2 $I(d) = k \cdot \frac{d^2}{\left(d^2 + h^2\right)^2}$ (h = Höhe der Antenne über dem Boden, k konst.)

$I = I(d)$ maximal (globales Maximum) für $d = h$

7.3 ...

7.4 (siehe nächste Seite)

7.4

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot 1 = \frac{df}{dz}(z)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{dz}(z) = \frac{d}{dz}\frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \cdot 1 = \frac{d^2 f}{dz^2}(z)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot (-v) = -v \cdot \frac{df}{dz}(z)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v \cdot \frac{df}{dz}(z)\right) = -v \cdot \frac{\partial}{\partial t}\frac{df}{dz}(z) = -v \cdot \frac{d}{dz}\frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = -v \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \cdot (-v) = v^2 \frac{d^2 f}{dz^2}(z)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

7.5 -