Aufgaben 5 Schwingungen
Gedämpfte Schwingung

Lernziele

- die Analogie zwischen einer Drehschwingung und einer linearen Schwingung kennen.
- verstehen, wie eine Schwingung gedämpft werden kann.
- verstehen, wie ein mechanischer Dämpfer funktioniert.
- verstehen, dass alle natürlich ablaufenden Schwingungen gedämpft sind.
- wissen, wie die Stärke der Dämpfung die Bewegung eines Schwingers beeinflusst.
- die bei einer mechanischen, gedämpften Schwingung auftretenden Impuls- und Energieflüsse verstehen.
- mit der Modellierungssoftware Berkeley Madonna ein einfaches systemdynamisches Modell erstellen und damit einfache Simulationen und Parameterstudien ausführen können.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

5.1 **Vorgängiges Selbststudium**

a) Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 1.7 Drehschwingungen: Hin- und herfliessender Drehimpuls (Seite 10, ohne Aufgaben)
- 1.9 Die Dämpfung von Schwingungen (Seite 12)

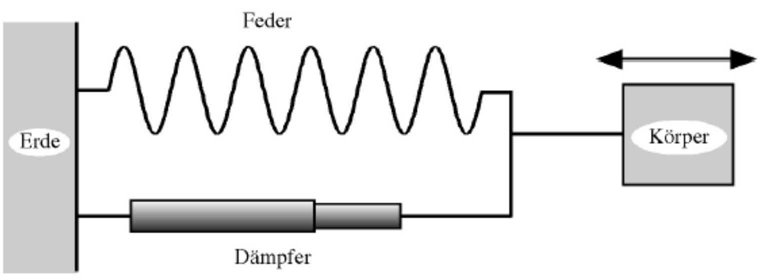
Hinweis zum Abschnitt 1.7:
- Es geht hier nur darum, das Drehpendel als Experimentiergerät zur Untersuchung von gedämpften Schwingungen kennenzulernen. Drehbewegungen und physikalische Grössen zu deren Beschreibung (Drehimpuls, Drehmoment, Trägheitsmoment) werden wir später im Kurs diskutieren.

b) Führen Sie in Moodle den Test 5.1 durch.

5.2 Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- Gedämpfte Schwingung - Drehpendel (1:29)

5.3 In dieser Aufgabe sollen Sie die Dynamik des gedämpften Federschwingers untersuchen.

Betrachten Sie also den folgenden gedämpften Federschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.29, Seite 12):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei $x = 0$ liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft F_F (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft F_D (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

a) Skizzieren Sie den Federschwinger, und zeichnen Sie die beiden Kräfte F_F und F_D ein. Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Fälle für die Richtungen der beiden Kräfte.

b) Formulieren Sie für den Schwingkörper das (aus der Mechanik bekannte) Aktionsprinzip.

Die drei Grössen in der in b) formulierten Gleichung hängen vom Ort x, der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a des Schwingkörpers ab.

c) Geben Sie an, wie die drei Grössen von x, v und a abhängen, und setzen Sie die Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.

Der zeitliche Verlauf der Auslenkung x lautet bei schwacher und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

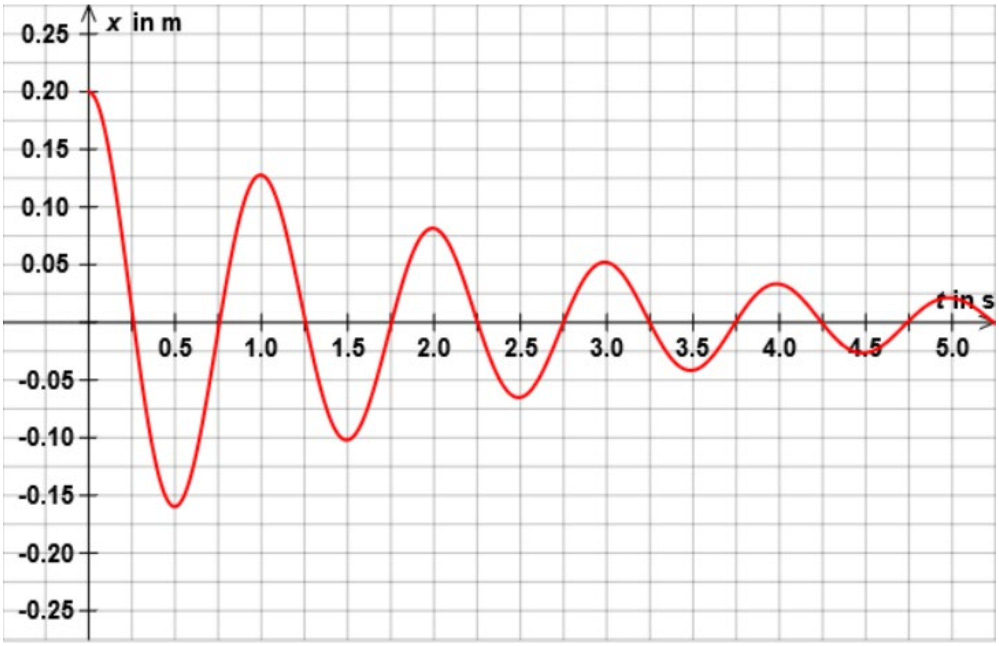
$$x = x(t) = \hat{x}\, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ($\delta < \omega_0$, schwache Dämpfung)

Für bestimmte Zahlenwerte der Grössen m, D, k, $\hat{x}$ und φ sieht der Graf von $x = x(t)$ für $t \geq 0$ s wie folgt aus:



d) Bestimmen Sie aus dem Grafen die konkreten Zahlenwerte für die Periode T_d und die Kreisfrequenz ω_d.

e) Bestimmen Sie aus dem Grafen die Zeitpunkte/Zeitintervalle, zu/in welchen ...

i) ... in der Feder keine Energie gespeichert ist.

ii) ... im Dämpfer keine Energie dissipiert wird.

iii) ... im Schwingkörper kein Impuls gespeichert ist.

iv) ... Impuls von der Feder in den Schwingkörper fliesst.

v) ... Impuls vom Schwingkörper in den Dämpfer fliesst.

vi) ... Impuls von der Feder in die Erde fliesst.

vii) ... Energie von der Feder in die Erde fliesst.

viii) ... Energie in den Dämpfer fliesst.

5.4 Bearbeiten Sie die Aufgabe 5.3 a) bis c) für den Fall ohne Dämpfung ($k = 0$ Ns/m).

5.5 Die Schwingung des gedämpften Federschwingers in der Aufgabe 5.3 soll systemdynamisch modelliert und simuliert werden.

a) Erstellen Sie mit Berkeley Madonna ein systemdynamisches Modell. Dabei sollen die folgenden Grössen durch je einen Behälter modelliert werden:
- Impuls p des Schwingkörpers
- Ort x des Schwingkörpers
- Kinetische Energie W_{kin} des Schwingkörpers
- Federenergie W_F
- im Dämpfer dissipierte Energie W_{diss}

Die Dämpfungskraft F_D soll proportional zur Geschwindigkeit v des Schwingkörpers sein, d.h. $F_D \sim v$ bzw. $F_D = - k \cdot v$ (k = Dämpfungskonstante)

Hinweise:
- Achten Sie auf das richtige Vorzeichen der Impulsstromstärken.
- Das Vorzeichen einer Impulsstromstärke hängt davon ab, ob die Impulsstromstärke als Zufluss oder als Abfluss modelliert wird.

b) Simulieren Sie die gedämpfte Schwingung für verschiedene Werte der Dämpfungskonstanten k. Betrachten Sie dabei alle Fälle für die Stärke der Dämpfung (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.32, Seite 12). Stellen Sie jeweils die folgenden Grössen je in einem gemeinsamen Diagramm dar:
- Ort x
- Kinetische Energie W_{kin}, im Dämpfer dissipierte Energie W_{diss}

Lösungen

5.1 -

5.2 -

5.3 a) Die Richtungen der beiden Kräfte F_F und F_D hängen vom Ort x und der Geschwindigkeit v des Schwingkörpers ab.

Fälle:
- $x = 0$, $v > 0$ (Nulldurchgang nach rechts): $F_F = 0$, $F_D < 0$ (F_F ist gleich null, F_D zeigt nach links)
- $x > 0$, $v > 0$: $F_F < 0$, $F_D < 0$ (F_F und F_D zeigen nach links)
- $x > 0$, $v = 0$ (rechter Umkehrpunkt): $F_F < 0$, $F_D = 0$ (F_F zeigt nach links, F_D ist gleich null)
- $x > 0$, $v < 0$: $F_F < 0$, $F_D > 0$ (F_F zeigt nach links, F_D zeigt nach rechts)
- $x = 0$, $v < 0$ (Nulldurchgang nach links): $F_F = 0$, $F_F > 0$ (F_F ist gleich null, F_D zeigt nach rechts)
- $x < 0$, $v < 0$: $F_F > 0$, $F_D > 0$ (F_F und F_D zeigen nach rechts)
- $x < 0$, $v = 0$ (linker Umkehrpunkt): $F_F > 0$, $F_D = 0$ (F_F zeigt nach rechts, F_D ist gleich null)
- $x < 0$, $v > 0$: $F_F > 0$, $F_D < 0$ (F_F zeigt nach rechts, F_D zeigt nach links)

b) $F_F + F_D = \dot{p}$

c) $F_F = - D \cdot x$ $F_D = - k \cdot v$ $\dot{p} = m \cdot a$
$\Rightarrow$ $- D \cdot x - k \cdot v = m \cdot a$

d) Periode $T_d = 1.0$ s
Kreisfrequenz $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 6.3\ s^{-1}$

e) i) Zeitpunkte, zu welchen die Feder entspannt ist
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x = 0$ m
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen der Graf die Zeitachse schneidet
$\Rightarrow$ $t = 0.25$ s, 0.75 s, 1.25 s, ...

ii) Zeitpunkte, zu welchen der Schwingkörper in Ruhe ist
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v = 0$ m/s
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen der Graf ein lokales Maximum/Minimum annimmt
$\Rightarrow$ $t = 0.0$ s, 0.5 s, 1.0 s, ...

iii) gleiche Zeitpunkte wie in ii)

iv) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestaucht, d.h. weder entspannt noch gestreckt ist
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x < 0$ m
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf unterhalb der Zeitachse verläuft
$\Rightarrow$ $0.25\ s < t < 0.75\ s$, $1.25\ s < t < 1.75\ s$, $2.25\ s < t < 2.75\ s$, ...

v) Zeitintervalle, in welchen sich der Schwingkörper in die positive Richtung bewegt
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v > 0$ m/s
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf nach oben verläuft
$\Rightarrow$ $0.5\ s < t < 1.0\ s$, $1.5\ s < t < 2.0\ s$, $2.5\ s < t < 3.0\ s$, ...

vi) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestreckt, d.h. weder entspannt noch gestaucht ist
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x > 0$ m
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf oberhalb der Zeitachse verläuft
$\Rightarrow$ $0.0\ s < t < 0.25\ s$, $0.75\ s < t < 1.25\ s$, $1.75\ s < t < 2.25\ s$, ...

vii) nie

viii) Zeitintervalle, in welchen im Dämpfer Energie dissipiert wird
$\Rightarrow$ Zeitintervalle zwischen den in ii) bestimmten Zeitpunkten

5.4 (siehe nächste Seite)

5.4 a) Die Richtung der Kraft F_F hängt vom Ort x des Schwingkörpers ab.

Fälle:
- x = 0 (Nulldurchgänge): $F_F = 0$ (F_F ist gleich null)
- x > 0: $F_F < 0$ (F_F zeigt nach links)
- x < 0: $F_F > 0$ (F_F zeigt nach rechts)

b) $\Rightarrow\ F_F = \dot{p}$

c) $F_F = -D\cdot x$ $\dot{p} = m\cdot a$
$\Rightarrow\ -D\cdot x = m\cdot a$

5.5 Berkeley-Madonna-Modell Horizontaler Federschwinger (frei, gedämpft)

Annahmen:
- Die positive x-Achse zeigt nach rechts.
- Der Schwingkörper wird am Ort x = 0.2 m aus der Ruhe losgelassen.

Anfangswerte (folgen aus den Annahmen):
p = 0 Hy, W_{kin} = 0 J, x = 0.2 m

Parameterwerte:
m = 2 kg, D = 50 N/m, k = 1 Ns/m (schwache Dämpfung)