

Aufgaben 11

Ableitung

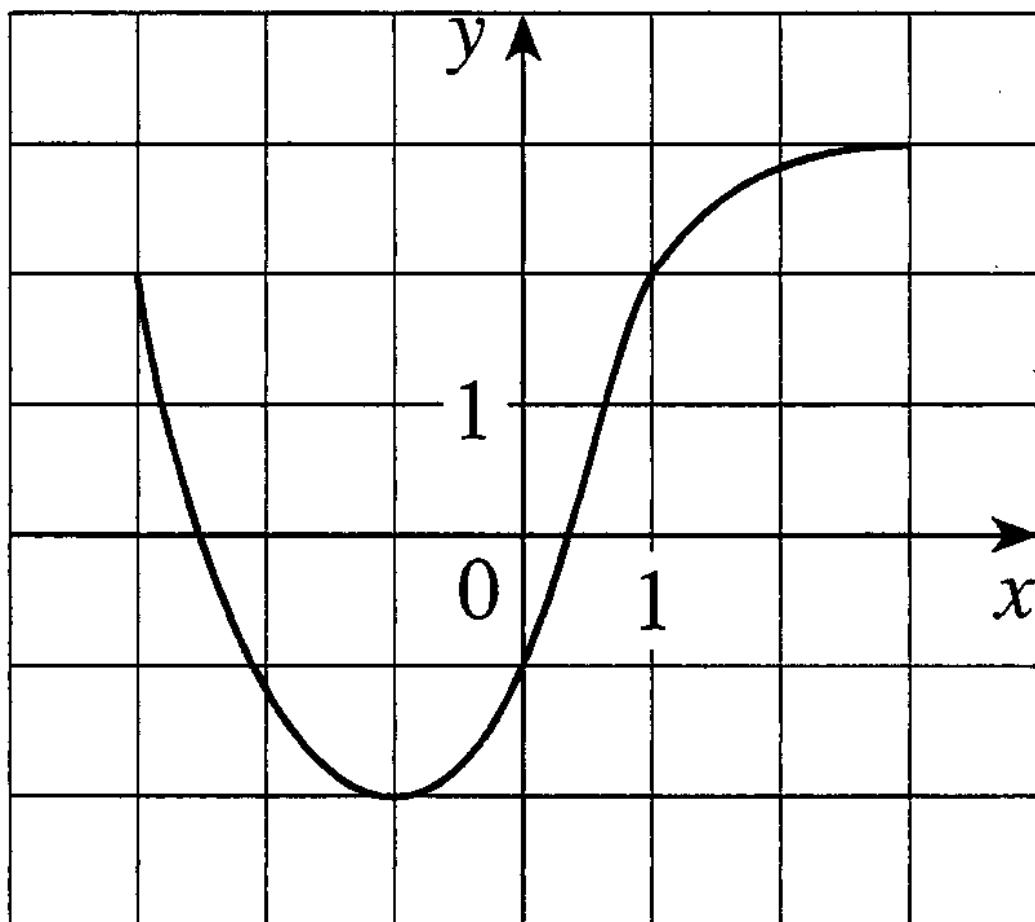
Ableitung (Änderungsrate), Ableitung (Ableitungsfunktion) einer konstanten Funktion/Potenz-/Exponentialfunktion

Lernziele

- eine Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion aus dem Grafen der Funktion abschätzen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer konstanten und einer linearen Funktion angeben können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer konstanten und einer linearen Funktion bestimmen können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.

Aufgaben

11.1 Gegeben ist der Graf einer Funktion f :



Schätzen Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ an der gegebenen Stelle x_0 ab:

- | | |
|---------------|---------------|
| a) $x_0 = -1$ | b) $x_0 = 0$ |
| c) $x_0 = 1$ | d) $x_0 = -2$ |

Hinweise:

- Zeichnen Sie die Tangente an den Grafen von f an der gegebenen Stelle x_0 .
- Wählen Sie zwei beliebige Punkte auf der Tangente, und schätzen Sie ihre Koordinaten ab.
- Bestimmen Sie die Steigung der Tangente mit Hilfe der abgeschätzten Koordinaten der beiden Punkte.

11.2 Bearbeiten Sie für jede der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = \dots$ die folgenden Teilaufgaben:

- i) Zeichnen Sie den Grafen von f .
- ii) Geben Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ an der gegebenen Stelle x_0 an.
- a) $f(x) = 3$ $x_0 = 2$
- b) $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$
- c) $f(x) = 2x - 3$ $x_0 = 4$
- d) $f(x) = mx + q$ ($m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{R}$) irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$

Hinweis:

- Wenn der Graf einer Funktion f eine Gerade ist, dann ist die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ die Steigung dieser Geraden, d.h. $f'(x_0)$ ist an jeder Stelle x_0 gleich gross.

11.3 Bestimmen Sie $f'(x)$:

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|--|
| a) $f(x) = 3$ | b) $f(x) = 0$ | c) $f(x) = -1$ |
| d) $f(x) = x^3$ | e) $f(x) = x^4$ | f) $f(x) = x^5$ |
| g) $f(x) = x^{17}$ | h) $f(x) = x^{200}$ | i) $f(x) = x^{100'001}$ |
| j) $f(x) = x^{-1}$ | k) $f(x) = x^{-2}$ | l) $f(x) = x^{-17}$ |
| m) $f(x) = \frac{1}{x}$ | n) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | o) $f(x) = \frac{1}{x^{99}}$ |
| p) $f(x) = 3^x$ | q) $f(x) = 5^x$ | r) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ |

11.4 Bestimmen Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ der Funktion f an den angegebenen Stellen x_0 :

- | | | | |
|--|---------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = x$ | i) $x_0 = 0$ | ii) $x_0 = 1$ | iii) $x_0 = -2$ |
| b) $f(x) = x^5$ | i) $x_0 = 0$ | ii) $x_0 = 2$ | iii) $x_0 = -\frac{2}{3}$ |
| c) $f(x) = x^4$ | i) $x_0 = -1$ | ii) $x_0 = -\frac{4}{3}$ | iii) $x_0 = 0$ |
| d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ | i) $x_0 = 0$ | ii) $x_0 = 1$ | iii) $x_0 = -2$ |

11.5 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion f an der Stelle x_0 ist ...

- ... eine reelle Zahl.
- ... eine Funktion.
- ... eine Tangente.
- ... ein Graf.

- b) (siehe nächste Seite)

b) Die Ableitung (Ableitungsfunktion) f' einer Funktion f ist ...

- ... eine reelle Zahl.
- ... eine Funktion.
- ... eine Tangente.
- ... ein Graf.

c) $f'(x_0)$ ist die Steigung der ...

- ... Sekante durch die Punkte $(0|0)$ und $(x_0|f(x_0))$.
- ... Sekante durch die Punkte $(x_0+\Delta x|f(x_0+\Delta x))$ und $(x_0|f(x_0))$.
- ... Tangente an den Grafen von f durch $(x_0|f(x_0))$.
- ... Tangente an den Grafen von f' durch $(x_0|f(x_0))$.

Lösungen

11.1 a) $f'(-1) \approx 0$

b) $f'(0) \approx 2$

c) $f'(1) \approx \frac{3}{2}$

d) $f'(-2) \approx -\frac{5}{3}$

11.2 a) i) ...

ii) $f'(2) = 0$

b) i) ...

ii) $f'(x_0) = 0$ an jeder Stelle x_0

c) i) ...

ii) $f'(4) = 2$

d) i) ...

ii) $f'(x_0) = m$ an jeder Stelle x_0

11.3 a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 0$

c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = 3x^2$

e) $f'(x) = 4x^3$

f) $f'(x) = 5x^4$

g) $f'(x) = 17x^{16}$

h) $f'(x) = 200x^{199}$

i) $f'(x) = 100'001x^{100'000}$

j) $f'(x) = -x^{-2}$

k) $f'(x) = -2x^{-3}$

l) $f'(x) = -17x^{-18}$

m) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

n) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$

o) $f'(x) = -\frac{99}{x^{100}}$

p) $f'(x) = 3^x \ln(3)$

q) $f'(x) = 5^x \ln(5)$

r) $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

11.4 a) $f'(x) = 1$

i) $f'(0) = 1$

ii) $f'(1) = 1$

iii) $f'(-2) = 1$

b) $f'(x) = 5x^4$

i) $f'(0) = 0$

ii) $f'(2) = 80$

iii) $f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{80}{81}$

c) $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$

i) $f'(-1) = 4$

ii) $f'\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{243}{256}$

iii) $f'(0)$ ist nicht definiert
(Division durch null)

d) $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

i) $f'(0) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ii) $f'(1) = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

iii) $f'(-2) = \frac{9}{4} \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

11.5 a) 1. Aussage

b) 2. Aussage

c) 3. Aussage