

## Übung 8                      Funktionstypen                                     Ganzrationale Funktion

### Lernziele

- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines Polynoms verstehen.
- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines einfacheren Polynoms bestimmen können.
- die Regel zum Auffinden von ganzzahligen Nullstellen einer Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten anwenden können.
- charakteristische Eigenschaften einer Polynomfunktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

### Aufgaben

1. Gegeben ist die folgende Polynomfunktion  $f$  vom Grad 3.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

- a) i) Überprüfen Sie, dass  $x = 1$  eine **Nullstelle** von  $f$  ist.  
ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:  
 $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$   
Stellen Sie fest, dass es **möglich** ist,  $f(x)$  als Produkt des Linearfaktors  $(x - 1)$  und eines Polynoms  $g(x)$  darzustellen, wobei die Polynomfunktion  $g$  vom Grad 2 ist.
- b) i) Überprüfen Sie, dass  $x = 2$  **keine Nullstelle** von  $f$  ist.  
ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:  
 $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$   
Stellen Sie fest, dass es **nicht möglich** ist,  $f(x)$  als Produkt des Linearfaktors  $(x - 2)$  und eines Polynoms  $g(x)$  darzustellen.
- c)  $x_1 = 1$  ist eine Nullstelle von  $f$  (siehe a)).  
Bestimmen Sie die restlichen reellen Nullstellen von  $f$ , und stellen Sie  $f(x)$  in der Produktform dar.

2. Papula: 299/3 (nur Produktform), 299/7, 300/13 (ohne Horner-Schema)

3. Betrachten Sie die allgemeine Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \quad n \in \mathbb{N}_0, a_n \neq 0$$

- a) Zeichnen Sie mit dem Computerprogramm MAPLE die Grafen der folgenden konkreten Polynomfunktionen:
- i)  $f_1(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$   
ii)  $f_2(x) = 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$   
iii)  $f_3(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 1$
- b) Finden Sie charakteristische Eigenschaften des Grafen einer Polynomfunktion vom Grad  $n$ . Gesucht sind Eigenschaften, die zwar von  $n$ , jedoch nicht von den konkreten Werten der Koeffizienten  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  abhängen.

Hinweise:

- Betrachten Sie die Grafen der Funktionen  $f_1, f_2$  und  $f_3$ .
- Variieren Sie die Koeffizienten, und stellen Sie fest, welche Eigenschaften der Grafen unverändert bleiben.
- Betrachten Sie die Grafen von weiteren Polynomfunktionen.

## Lösungen

1. a) i) ...  
ii)  $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$   
g mit  $g(x) = x^2 - x - 6$  ist eine Polynomfunktion vom Grad 2
- b) i) ...  
ii)  $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 - 5 - \frac{4}{x - 2}$   
g mit  $g(x) = x^2 - 5 - \frac{4}{x - 2}$  ist keine Polynomfunktion
- c)  $x_2 = 3, x_3 = -2$   
 $f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

2. siehe Papula

3. a) ...  
b) ...