

## Aufgaben 12      Funktionstypen Logarithmusfunktion, Exp.-/Log.-Gleichungen, Hyperbol. Funktionen

### Lernziele

- die Rechenregeln für Logarithmen anwenden können.
- die einfach-logarithmische Darstellung von Exponentialfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die doppelt-logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die Beziehung zwischen Schallintensität und Schallpegel als Beispiel einer Logarithmusfunktion kennen.
- einfachere Exponential- und Logarithmusgleichungen von Hand lösen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

### Aufgaben

#### Logarithmusfunktion

12.1 Fassen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\log_a(m) + \log_a(n)$                                     | b) $\log_a(m) - \log_a(n)$                                |
| c) $\log_a(b) + \log_a(c) - (\log_a(d) + \log_a(e))$           | d) $-\log_a(r)$   |
| e) $\log_a(x) + \log_a(y) + \log_a(z) - \log_a(u) - \log_a(v)$ | f) $m \cdot \log_a(x) - n \cdot \log_a(y)$                |
| g) $\frac{1}{n} (\log_a(x) + \log_a(y) - \log_a(z))$           | h) $\log_a(a^{1/2}) + \log_a(a^{3/2}) - \log_a(\sqrt{b})$ |

12.2 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze als Summe bzw. Differenz einzelner Logarithmen:

- |                      |   |
|----------------------|---|
| a) $\log_a(pqr)$     | b) $\log_a(3xy)$  |
| c) $\log_a(b(c+d))$  | d) $\log_a(pq-pr)$  |
| e) $\log_a(b^3)$     | f) $\log_a\left(\frac{1}{c^2}\right)$                                 |
| g) $\log_a((b+c)^4)$ | h) $\log_a \frac{\sqrt{xy}}{z^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$ |

12.3 Gegeben ist die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = y_0 \cdot a^{kx}$$

a) Betrachten Sie die konkrete Exponentialfunktion mit den folgenden Parameterwerten:

$$y_0 = 5, a = 10, k = 2$$

- Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von  $f$  in ein einfach-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "x-lg(y)-Darstellung").
  - Stellen Sie fest, dass der Graf von  $f$  eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt  $\lg(5)$ .
- b) Begründen Sie, dass der Graf von  $f$  in einem  $x$ - $\log_a(y)$ -Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung  $k$  und dem Achsenabschnitt  $\log_a(y_0)$ .

12.4 Gegeben ist die Potenzfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = y_1 \cdot x^k$$

a) Betrachten Sie die konkrete Potenzfunktion mit den folgenden Parameterwerten:

$$y_1 = 3, k = 2$$

i) Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von  $f$  in ein doppelt-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "lg(x)-lg(y)-Darstellung").

ii) Stellen Sie fest, dass der Graf von  $f$  eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt  $\lg(3)$ .

b) Begründen Sie, dass der Graf von  $f$  in einem  $\log_a(x)$ - $\log_a(y)$ -Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung  $k$  und dem Achsenabschnitt  $\log_a(y_1)$ .

12.5 Der Zusammenhang zwischen dem Schallpegel  $L$  und der Schallintensität  $I$  einer Schallquelle wird durch eine Logarithmusfunktion beschrieben (vgl. Unterricht):

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \quad \text{wobei: } I_0 := 10^{-12} \text{ W/m}^2 \text{ (Hörschwelle)}$$

a) Gegeben sei eine als punktförmige Schallquelle betrachtete Sirene mit der Schallleistung 1000 W.

Bestimmen Sie die Schallintensität und den Schallpegel im Abstand 100 m von der Sirene, falls von Verlusten abgesehen wird.

b) Zeigen Sie, dass der Schallpegel  $L$  bei jeder Verdoppelung des Abstandes von der Sirene jeweils um gleich viele Dezibel abnimmt - und zwar unabhängig davon, von welchem Anfangsabstand man ausgeht.

Bestimmen Sie, um wieviel sich der Schallpegel bei jeder Verdoppelung des Abstandes verändert.

#### *Exponential-, Logarithmusgleichungen*

12.6 Papula 1: 322/12 (307/12), 322/13 (307/13)

#### *Hyperbolische Funktionen*

12.7 Papula 1: 322/11 (307/11)

**Lösungen**

- 12.1 a)  $\log_a(mn)$  b)  $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)$   
c)  $\log_a\left(\frac{bc}{de}\right)$  d)  $\log_a\left(\frac{1}{r}\right)$   
e)  $\log_a\left(\frac{xyz}{uv}\right)$  f)  $\log_a \frac{x^m}{y^n}$   
g)  $\log_a \sqrt[n]{\frac{xy}{z}}$  h)  $\log_a \frac{a^2}{\sqrt{b}}$
- 12.2 a)  $\log_a(p) + \log_a(q) + \log_a(r)$  b)  $\log_a(3) + \log_a(x) + \log_a(y)$   
c)  $\log_a(b) + \log_a(c+d)$  d)  $\log_a(p) + \log_a(q-r)$   
e)  $3 \cdot \log_a(b)$  f)  $-2 \cdot \log_a(c)$   
g)  $4 \cdot \log_a(b+c)$  h)  $-\frac{3}{2} \log_a(x) + \frac{5}{2} \log_a(y) - 2 \log_a(z)$
- 12.3 a) i) ...  
ii) ...  
b)  $y = y_0 \cdot a^{kx}$  |  $\log_a(\dots)$   
 $\log_a(y) = \log_a(y_0) + k \cdot x$
- 12.4 a) i) ...  
ii) ...  
b)  $y = y_1 \cdot x^k$  |  $\log_a(\dots)$   
 $\log_a(y) = \log_a(y_1) + k \cdot \log_a(x)$
- 12.5 a)  $I = 8.0 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$   
 $L = 99 \text{ dB}$   
b)  $L = -6 \text{ dB}$
- 12.6 siehe Papula 1
- 12.7 siehe Papula 1