

Aufgaben 12 Funktionstypen Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Gebrochenrationale Funktion

Lernziele

- den Grafen einer Potenz-, Wurzelfunktion skizzieren können.
- die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Potenz-, Wurzelfunktion beurteilen können.
- die Umkehrfunktion einer bijektiven Potenz-, Wurzelfunktion bestimmen können.
- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf den Grafen einer Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen den Grafen einer bijektiven Funktion und deren Umkehrfunktion kennen und verstehen.
- charakteristische Eigenschaften einer gebrochenrationalen Funktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

Aufgaben

Potenzfunktion, Wurzelfunktion

12.1 Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen der folgenden Potenz- bzw. Wurzelfunktionen:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = x^n$ für $n = 2, 3, 4$ und 5 .
- b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = x^{-n}$ für $n = 1, 2, 3$ und 4 .
- c) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ für $n = 2, 3, 4$ und 5 .

12.2 Betrachten Sie die Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten:

$$f: A \rightarrow B, x \rightarrow y = f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$$

- a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f in Abhängigkeit von n für $A = B = \mathbb{R}$.
- b) Wählen Sie für A und B "grösstmögliche" Teilmengen von \mathbb{R} , so dass die Funktion f bijektiv wird.
- c) Bestimmen Sie für $n = 2, 3$ und 4 die Umkehrfunktion $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x)$.
- d) Skizzieren Sie für $n = 2, 3$ und 4 die Grafen von f und f^{-1} .

12.3 Betrachten Sie die Potenzfunktion mit rationalem Exponenten:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = x^{m/n} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

- a) Beurteilen Sie die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f .
- b) Beurteilen Sie, ob und gegebenenfalls wie man den Definitionsbereich und/oder den Zielbereich von f einschränken müsste, damit f bijektiv wird.
- c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}: \dots \rightarrow \dots, x \rightarrow y = f^{-1}(x)$.

12.4 Betrachten Sie die Potenzfunktionen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) &= a(x - x_0)^n + y_0 & n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ g: \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = g(x) &= a(x - x_0)^{-n} + y_0 & n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Skizzieren Sie von Hand, d.h. ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners oder Computers, die Grafen von f und g . Unterscheiden Sie dabei die Fälle n gerade und n ungerade.

Hinweis:

Gehen Sie von den Grafen aus, die Sie in der Aufgabe 12.1 skizziert haben.

Gebrochenrationale Funktion

12.5 Betrachten Sie die allgemeine gebrochenrationale Funktion

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = \frac{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0}{b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0} \quad m, n \in \mathbb{N}_0, a_m \neq 0, b_n \neq 0$$

- a) Geben Sie für den Definitionsbereich A die "grösstmögliche" Teilmenge von \mathbb{R} an.
- b) Finden Sie charakteristische Eigenschaften des Grafen einer echt oder unecht gebrochenrationalen Funktion.

Lösungen

- 12.1 a) ...
b) ...
c) ...
- 12.2 a) n ungerade: f injektiv, f surjektiv \Rightarrow f bijektiv
n gerade: f nicht injektiv, f nicht surjektiv \Rightarrow f nicht bijektiv
b) n ungerade: $A = B = \mathbb{R}$
n gerade: $A = B = \mathbb{R}_0^+$ oder $A = B = \mathbb{R}_0^-$
c) n = 2: $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
oder
 $f^{-1}: \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}_0^-, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
n = 3: $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt[3]{-x} & (x < 0) \end{cases}$
n = 4: $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
oder
 $f^{-1}: \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R}_0^-, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$
d) ...
- 12.3 a) f injektiv, f nicht surjektiv \Rightarrow f nicht bijektiv
b) Definitionsbereich = Zielbereich = \mathbb{R}^+
c) $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = x^{n/m}$
- 12.4 ...
- 12.5 a) $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, wobei x_1, x_2, \dots, x_N die N Nullstellen des Nennerpolynoms sind ($N \leq n$)
b) ...