

## Aufgaben 13      Funktionstypen Trigonometrische Funktionen und Gleichungen, Arkusfunktionen

### Lernziele

- den Einfluss einer Verschiebung, Skalierung auf die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion kennen und verstehen.
- die Amplitude, Periode und Phasenverschiebung einer trigonometrischen Funktion bestimmen können.
- den Grafen einer einfacheren trigonometrischen Funktion skizzieren können.
- die Lösungen einer einfacheren trigonometrischen Gleichung von Hand bestimmen können.
- die Umkehrfunktion einer einfacheren trigonometrischen Funktion bestimmen können.

### Aufgaben

- 13.1 Betrachten Sie die einfachstmögliche Sinus-Funktion  $f$  und die aus ihr abgeleiteten Funktionen  $f_1, f_2, f_3$  und  $f_4$ :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = \sin(x)$$

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_1(x) := \sin(x+b) \quad (b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_2(x) := \sin(a \cdot x) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_3(x) := A \cdot \sin(x) \quad (A \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_4(x) := A \cdot \sin(ax+b) \quad (A \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

- a) Skizzieren Sie ins gleiche Koordinatensystem die Grafen von ...
- ...  $f$  und  $f_1$   
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $b > 0$  und  $b < 0$ .
  - ...  $f$  und  $f_2$   
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $a > 1$  und  $0 < a < 1$ .
  - ...  $f$  und  $f_3$   
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $A > 1$  und  $0 < A < 1$ .
  - ...  $f$  und  $f_4$  für den Fall  $A > 1, a > 1, b < 0$ .
- b) Geben Sie für alle Funktionen  $f, f_1, \dots, f_4$  die Amplitude  $A$ , die Periode  $p$  und die Phasenverschiebung  $x_0$  an.

- 13.2 Papula 1: 318/5 (303/5), 318/6 (303/6), 318/4 (303/4)

- 13.3 Die Sinus-Funktion

$$f: \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \left\{ y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1 \right\}$$
$$x \rightarrow y = f(x) = \sin(x)$$

ist bijektiv. Deren Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ist die Arkussinus-Funktion  $\arcsin$  (vgl. Unterricht):

$$f^{-1}: \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \right\} \rightarrow \left\{ y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

- a) Die Arkuscosinus-Funktion  $\arccos$  ist die Umkehrfunktion der Cosinus-Funktion
- $$f: \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\} \rightarrow B$$
- $$x \rightarrow y = f(x) = \cos(x)$$
- i) Bestimmen Sie den Zielbereich B, so dass die Cosinus-Funktion bijektiv wird.
- ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion  $\arccos$  an.
- iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen  $f$  und  $f^{-1}$  im gleichen Koordinatensystem.
- b) Die Arkustangens-Funktion  $\arctan$  ist die Umkehrfunktion der Tangens-Funktion
- $$f: \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow B$$
- $$x \rightarrow y = f(x) = \tan(x)$$
- i) Bestimmen Sie den Zielbereich B, so dass die Tangens-Funktion bijektiv wird.
- ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion  $\arctan$  an.
- iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen  $f$  und  $f^{-1}$  im gleichen Koordinatensystem.
- c) Die Arkuscotangens-Funktion  $\operatorname{arccot}$  ist die Umkehrfunktion der Cotangens-Funktion
- $$f: \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\} \rightarrow B$$
- $$x \rightarrow y = f(x) = \cot(x)$$
- i) Bestimmen Sie den Zielbereich B, so dass die Cotangens-Funktion bijektiv wird.
- ii) Geben Sie den Definitionsbereich, den Zielbereich und die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion  $\operatorname{arccot}$  an.
- iii) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen  $f$  und  $f^{-1}$  im gleichen Koordinatensystem.
- 13.4 Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen:
- a)  $\sin(x) = a$  ( $-1 \leq a \leq 1$ )
- b)  $\cos(x) = b$  ( $-1 \leq b \leq 1$ )
- c)  $\tan(x) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )
- d)  $\cot(x) = d$  ( $d \in \mathbb{R}$ )
- 13.5 Papula 1: 320/16 (305/16)
- 13.6 Bearbeiten Sie für die beiden Funktionen in der Aufgabe 318/6 (303/6) im Buch Papula 1 die folgenden Teilaufgaben:
- i) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich A und den Zielbereich B "grösstmögliche" Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so dass die Funktion bijektiv wird.
- ii) Skizzieren Sie den Grafen der bijektiven Funktion.
- iii) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.
- iv) Skizzieren Sie den Grafen der Umkehrfunktion ins gleiche Koordinatensystem wie in ii).

**Lösungen**

- 13.1 a) i) ...  
 ii) ...  
 iii) ...  
 iv) ...
- b) f:  $A = 1$        $p = 2\pi$        $x_0 = 0$   
 $f_1$ :  $A = 1$        $p = 2\pi$        $x_0 = -b$   
 $f_2$ :  $A = 1$        $p = \frac{2\pi}{a}$        $x_0 = 0$   
 $f_3$ :  $A = A$        $p = 2\pi$        $x_0 = 0$   
 $f_4$ :  $A = A$        $p = \frac{2\pi}{a}$        $x_0 = -\frac{b}{a}$

13.2 siehe Papula 1

- 13.3 a) i)  $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$   
 ii)  $f^1: \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \pi\}$   
 $x \rightarrow y = f^1(x) = \arccos(x)$   
 iii) ...
- b) i)  $B = \mathbb{R}$   
 ii)  $f^1: \mathbb{R} \rightarrow \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$   
 $x \rightarrow y = f^1(x) = \arctan(x)$   
 iii) ...
- c) i)  $B = \mathbb{R}$   
 ii)  $f^1: \mathbb{R} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < \pi\}$   
 $x \rightarrow y = f^1(x) = \operatorname{arccot}(x)$   
 iii) ...

- 13.4 a)  $x_{1k} = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$   
 $x_{2k} = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- b)  $x_{1k} = \arccos(b) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$   
 $x_{2k} = -\arccos(b) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- c)  $x_k = \arctan(c) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- d)  $x_k = \operatorname{arccot}(d) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

13.5 siehe Papula 1

- 13.6 a) i)  $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6} \leq x \leq -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6}\right\}$   
 $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 4\}$
- ii) ...
- iii)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \left( \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) - 2 \right)$
- iv) ...
- b) i)  $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0\right\}$   
 $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
- ii) ...
- iii)  $f^{-1}: B \rightarrow A, x \rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left( \arccos\left(\frac{x}{2}\right) + \pi \right)$
- iv) ...