

## Aufgaben 20      Grenzwert einer Funktion Grenzwert einer Funktion, Grenzwertsätze, Stetigkeit

### Lernziele

- verstehen, was der Grenzwert einer Funktion ist.
- verstehen, was der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert einer Funktion ist.
- die symbolische Schreibweise für den Grenzwert einer Funktion kennen und korrekt anwenden können.
- einfachere Grenzwerte von Funktionen bestimmen können.
- die Grenzwertsätze anwenden können.
- beurteilen können, ob eine einfachere Funktion an einer bestimmten Stelle stetig ist oder nicht.

### Aufgaben

20.1 Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ :

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_1(x) = 3x \qquad f_2: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f_2(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$$

- a) Skizzieren Sie die Grafen der beiden Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ .
- b) Beurteilen Sie für beide Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ , ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:  
"Die Funktion ist an der Stelle  $x_0 = 2$  nicht definiert, besitzt an dieser Stelle jedoch einen Grenzwert."
- 20.2 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen über den Grenzwert einer Funktion wahr oder falsch sind:
- a) "Wenn an einer Stelle  $x_0$  sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle  $x_0$ ."
- b) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle  $x_0$  existiert, dann existiert an dieser Stelle  $x_0$  sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert."
- c) "Wenn an einer Stelle  $x_0$  sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide gleich gross sind, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle  $x_0$ ."
- d) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle  $x_0$  nicht existiert, dann existiert an dieser Stelle  $x_0$  entweder der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert nicht."
- e) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle  $x_0$  existiert, dann ist er gleich gross wie der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle  $x_0$ ."
- f) "Wenn die Funktion an der Stelle  $x_0$  definiert ist, dann existiert an dieser Stelle  $x_0$  der Grenzwert."
- g) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle  $x_0$  existiert, dann ist die Funktion an dieser Stelle  $x_0$  definiert."
- 20.3 Papula 1: 312/4 (298/4), 312/5 (298/5), 312/6 (298/6)
- 20.4 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:
- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-1}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{5-2x}{2x^2-3x-5}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2}$       e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^2 - a^2}{x}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a}}{x}$
- 20.5 Papula 1: 313/8 (298/8), 313/9 (298/9), 319/10 (298/10)

**Lösungen**

- 20.1 a) ...  
b) Die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  unterscheiden sich nur an der Stelle  $x_0 = 2$ :  
 $f_1$  ist an der Stelle  $x_0 = 2$  definiert und hat dort den Funktionswert  $f_1(2) = 6$ .  
Der Grenzwert für  $x \rightarrow 2$  existiert:  $\lim_{x \rightarrow 2} f_1(x) = 6$   
 $f_2$  ist an der Stelle  $x_0 = 2$  nicht definiert.  
Der Grenzwert für  $x \rightarrow 2$  existiert jedoch:  $\lim_{x \rightarrow 2} f_2(x) = 6$
- 20.2 a) falsch  
b) wahr  
c) wahr  
d) falsch  
e) wahr  
f) falsch  
g) falsch
- 20.3 siehe Papula 1
- 20.4 a)  $\frac{1}{2}$   
b) 0  
c)  $-\frac{2}{7}$   
d) 6  
e)  $2a$   
f)  $-\frac{1}{a^2}$
- 20.5 siehe Papula 1