Aufgaben 15 Funktionstypen
Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, Exp.-/Log.-Gleichungen

Lernziele

- einfachere Logarithmen von Hand berechnen können.
- verstehen, dass jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e ausgedrückt werden kann.
- verstehen, dass die relative Änderung einer sich zeitlich exponentiell veränderlichen Grösse in gleichen Zeitbereichen gleich ist.
- die Rechenregeln für Logarithmen anwenden können.
- die einfach-logarithmische Darstellung von Exponentialfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die doppelt-logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen und deren Nutzen verstehen.
- die Beziehung zwischen Schallintensität und Schallpegel als Beispiel einer Logarithmusfunktion kennen.
- einfachere Exponential- und Logarithmusgleichungen von Hand lösen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

15.1 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke von Hand:

a)	$\lg(10)$	b)	$\lg(10'000)$	c)	$\log_2(32)$
d)	$\log_5(125)$	e)	$\ln(e^4)$	f)	$\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$
g)	$\log_a(a)$	h)	$\log_a(a^x)$	i)	$\log_a(1)$
j)	$\log_a\left(\sqrt{a}\right)$	k)	$a^{\log_a(x)}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$	l)	$e^{-\ln(e/2)}$

15.2 Der zeitliche Verlauf einer Grösse N, die exponentiell wächst oder fällt, kann mit Hilfe der Exponentialfunktion ausgedrückt werden:

$N(t) = N_0\, a^t$ wobei: t = Zeit
$N(t)$ = Grösse N zum Zeitpunkt t
N_0 = Grösse N zum Zeitpunkt $t = 0$

exponentielles Wachsen, falls $a > 1$
(Bsp.: Kapital auf Bankkonto, Bakterienkultur)

exponentielles Fallen, falls $0 < a < 1$
(Bsp.: Radioaktiver Zerfall)

In den Naturwissenschaften und in der Technik wird ein exponentieller Verlauf meistens durch die Exponentialfunktion mit der Basis e und einem Vorfaktor λ bzw. $-\lambda$ ($\lambda > 0$) im Exponenten ausgedrückt:

$N(t) = N_0\, e^{\lambda t}$ (exponentielles Wachsen) bzw.

$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ (exponentielles Fallen)

a) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Wachsens tatsächlich zu jedem a ($a > 1$) ein $\lambda > 0$ finden kann, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $a^t = e^{\lambda t}$
Drücken Sie λ durch a aus.

b) Zeigen Sie, dass man für den Fall des exponentiellen Fallens tatsächlich zu jedem a ($0 < a < 1$) ein $\lambda > 0$ finden kann, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $a^t = e^{-\lambda t}$
Drücken Sie λ durch a aus.

15.3 In der Aufgabe 14.1 wurde festgestellt, dass der zeitliche Verlauf eines Kapitals K(t) durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird.

Gemäss Aufgabe 15.2 kann jeder exponentielle Verlauf durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e und dem Parameter λ ausgedrückt werden.

Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf des Kapitals K(t) durch eine Exponentialfunktion mit der Basis e, und bestimmen Sie den Wert des Parameters λ für den Zinssatz p = 0.5%.

Hinweis:
- Für diese Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.

15.4 Der mittlere Luftdruck in der Erdatmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe über Meer näherungsweise exponentiell ab:

$p(h) = p_0\, e^{-\lambda h}$ wobei: h = Höhe über Meer
p(h) = mittlerer Luftdruck auf der Höhe h
p_0 = mittlerer Luftdruck auf Meereshöhe = 1013 hPa

In Chur (h = 593 m) beträgt der mittlere Luftdruck 941 hPa.

Bestimmen Sie den mittleren Luftdruck auf dem Mount Everest (h = 8848 m).

Hinweis:
- Für diese Aufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.

15.5 Beim radioaktiven Zerfall nimmt die Anzahl N der radioaktiven Kerne exponentiell ab:

$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$

Zeigen Sie, dass die Zeitspannen, in welchen sich N jeweils halbiert, alle gleich lang sind.

Zu zeigen ist also, dass es - von einem beliebigen Zeitpunkt aus gesehen - immer jeweils gleich lang dauert, bis N jeweils wieder auf den halben Wert abgesunken ist.

15.6 Fassen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

a) $\log_a(m) + \log_a(n)$
b) $\log_a(m) - \log_a(n)$
c) $\log_a(b) + \log_a(c) - \left(\log_a(d) + \log_a(e)\right)$
d) $-\log_a(r)$
e) $\log_a(x) + \log_a(y) + \log_a(z) - \log_a(u) - \log_a(v)$
f) $m \cdot \log_a(x) - n \cdot \log_a(y)$
g) $\frac{1}{n}\left(\log_a(x) + \log_a(y) - \log_a(z)\right)$
h) $\log_a(a^{1/2}) + \log_a(a^{3/2}) - \log_a(\sqrt{b}\,)$

15.7 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmengesetze als Summe bzw. Differenz einzelner Logarithmen:

a) $\log_a(pqr)$
b) $\log_a(3xy)$
c) $\log_a(b(c+d))$
d) $\log_a(pq-pr)$
e) $\log_a(b^3)$
f) $\log_a\left(\frac{1}{c^2}\right)$
g) $\log_a\left((b+c)^4\right)$
h) $\log_a\left(\frac{\sqrt{xy}}{z^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\right)$

15.8 (siehe nächste Seite)

15.8 Gegeben ist die Exponentialfunktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = y_0 \cdot a^{kx}$$

a) Betrachten Sie die konkrete Exponentialfunktion mit den Parameterwerten $y_0 = 5$, $a = 10$, $k = 2$.

i) Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von f in ein einfach-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "x-lg(y)-Darstellung").

ii) Stellen Sie fest, dass der Graf von f eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt lg(5).

b) Begründen Sie, dass der Graf von f in einem x-$\log_a(y)$-Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung k und dem Achsenabschnitt $\log_a(y_0)$.

15.9 Gegeben ist die Potenzfunktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = y_1 \cdot x^{k}$$

a) Betrachten Sie die konkrete Potenzfunktion mit den Parameterwerten $y_1 = 3$, $k = 2$.

i) Berechnen Sie einige Funktionswerte, und zeichnen Sie den Grafen von f in ein doppelt-logarithmisches Koordinatensystem (Blatt "lg(x)-lg(y)-Darstellung").

ii) Stellen Sie fest, dass der Graf von f eine Gerade ist mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt lg(3).

b) Begründen Sie, dass der Graf von f in einem $\log_a(x)$-$\log_a(y)$-Koordinatensystem eine Gerade ist mit der Steigung k und dem Achsenabschnitt $\log_a(y_1)$.

15.10 Der Zusammenhang zwischen dem Schallpegel L und der Schallintensität I einer Schallquelle wird durch eine Logarithmusfunktion beschrieben (vgl. Unterricht):

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{wobei: } I_0 := 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}\ \text{(Hörschwelle)}$$

Gegeben sei eine als punktförmige Schallquelle betrachtete Sirene. Die Schallwelle strahle also in alle Raumrichtungen gleich stark ab. Zudem werde angenommen, dass bei der Ausbreitung der Schallwelle im Raum keine Energieverluste auftreten.

a) Bestimmen Sie die Schallintensität und den Schallpegel im Abstand 100 m von der Sirene, wenn die mittlere Schallleistung der Sirene 1000 W beträgt.

b) Zeigen Sie, dass allgemein, d.h. unabhängig von der mittleren Schallleistung, der Schallpegel L bei jeder Verdoppelung des Abstandes von der Sirene jeweils um gleich viele Dezibel abnimmt - und zwar unabhängig davon, von welchem Anfangsabstand man ausgeht.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus b), um wieviel sich der Schallpegel bei jeder Verdoppelung des Abstandes verändert.

Hinweis:
- Für die Teilaufgaben a) und c) können Sie einen Taschenrechner verwenden.

15.11 Papula 1: 322/12 (307/12), 322/13 (307/13)

Lösungen

15.1	a)	1	b)	4	c)	5	d)	3
	e)	4	f)	-4	g)	1	h)	x
	i)	0	j)	$\frac{1}{2}$	k)	x	l)	$\frac{2}{e}$

15.2 a) $\lambda = \ln(a)$ b) $\lambda = -\ln(a)$

15.3 $K(t) = K_0\, e^{\lambda t}$

$\lambda = \ln(1 + p) = 0.0049...$

15.4 $\lambda = \frac{-\ln\left(\left(\frac{p(h)}{p_0}\right)\right)}{h} = \frac{-\ln\left(\left(\frac{941\text{ hPa}}{1010\text{ hPa}}\right)\right)}{593\text{ m}} = 1.24\cdot10^{-4}\text{ m}^{-1}$ (gerundet)

p(8848 m) = 337 hPa

15.5 ...

15.6 a) $\log_a(mn)$ b) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)$ c) $\log_a\left(\frac{bc}{de}\right)$

d) $\log_a\left(\frac{1}{r}\right)$ e) $\log_a\left(\frac{xyz}{uv}\right)$ f) $\log_a\left(\frac{x^m}{y^n}\right)$

g) $\log_a\left(\sqrt[n]{\frac{xy}{z}}\right)$ h) $\log_a\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$

15.7 a) $\log_a(p) + \log_a(q) + \log_a(r)$ b) $\log_a(3) + \log_a(x) + \log_a(y)$

c) $\log_a(b) + \log_a(c+d)$ d) $\log_a(p) + \log_a(q-r)$

e) $3\cdot\log_a(b)$ f) $-2\cdot\log_a(c)$

g) $4\cdot\log_a(b+c)$ h) $-\frac{3}{2}\log_a(x) + \frac{5}{2}\log_a(y) - 2\log_a(z)$

15.8 a) ...

b) $y = y_0\cdot a^{kx}$ | $\log_a(...)$

$\log_a(y) = \log_a(y_0) + k\cdot x$

15.9 a) ...

b) $y = y_1\cdot x^k$ | $\log_a(...)$

$\log_a(y) = \log_a(y_1) + k\cdot\log_a(x)$

15.10 a) $I = 8.0\cdot10^{-3}\text{ W/m}^2$ b) ... c) $\Delta L \approx -6$ dB

L = 99 dB

15.11 siehe Papula 1