Aufgaben 17 — Reelle Zahlenfolgen
Bildungsgesetz, Rekursive Definition, Grenzwert einer Zahlenfolge

Lernziele

- aus dem Bildungsgesetz einer reellen Zahlenfolge die einzelnen Folgenglieder bestimmen können.
- das Bildungsgesetz einfacherer reeller Zahlenfolgen bestimmen können.
- aus der rekursiven Definition einer reellen Zahlenfolge die einzelnen Folgenglieder bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine einfachere reelle Zahlenfolge konvergent oder divergent ist.
- den Grenzwert einer einfacheren konvergenten Zahlenfolge bestimmen können.

Aufgaben

17.1 Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ aus ihrem Bildungsgesetz:

a) $a_n = \frac{n^n}{n!}$ b) $a_n = \left(-1\right)^{n+1} \frac{n!}{n^n}$

Bemerkung:
- Mit n! ($n \in \mathbb{N}$) wird die Fakultät von n bezeichnet: $n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
  Bsp.: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

17.2 Papula 1: 312/1 (297/1), 312/2 (297/2)

17.3 Finden Sie das Bildungsgesetz der folgenden Zahlenfolgen:

a) $\langle a_n \rangle = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$ b) $\langle a_n \rangle = \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \ldots$

c) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{15}{8}, \frac{12}{5}, \frac{35}{12}, \frac{24}{7}, \ldots$ d) $\langle a_n \rangle = 1, 1, \frac{7}{5}, \frac{15}{7}, \frac{31}{9}, \frac{63}{11}, \frac{127}{13}, \ldots$

17.4 Setzen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen jeweils um 4 weitere Glieder fort, und geben Sie jeweils das Bildungsgesetz an:

a) $\langle a_n \rangle = \frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, \ldots$ b) $\langle a_n \rangle = 4, -1, -2, 5, -8, \ldots$

c) $\langle a_n \rangle = \frac{7}{2}, -3, \frac{5}{2}, -2, \ldots$

17.5 Untersuchen Sie, welche der angegebenen Zahlen Glieder der jeweiligen Zahlenfolge sind:

a) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 8 - 5n$ Zahlen: -117, -3225

b) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 7n - n^2$ Zahlen: -30, -450

c) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{12 + 3n}{6n^2}$ Zahlen: 10, $\frac{1}{18}$

d) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = (-1)^n\, 2^{-n}$ Zahlen: -2, $\frac{1}{64}$

17.6 Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der rekursiv definierten Folgen $\langle a_n \rangle$:

a) $a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + 1$ b) $a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1} + 1$

c) $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + n - 1$ d) $a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + n - 1$

e) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
(Fibonacci-Folge)

17.7 Finden Sie das Bildungsgesetz der folgenden rekursiv definierten Folgen $<a_n>$:

a) $a_1 = 7$, $a_n = a_{n-1} - 3$

b) $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 1$

c) $a_1 = -4$, $a_n = a_{n-1} + 5$

d) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n - 1$

e) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

Hinweis:
- Berechnen Sie zuerst die ersten paar Folgenglieder.

17.8 Papula 1: 312/3 (297/3 zuunterst auf der Seite 297)

17.9 Gegeben ist die konvergente Folge $<a_n>$ und die positive Zahl ε.

Bestimmen Sie …

i) … den Grenzwert g der Folge.

ii) … die kleinste natürliche Zahl n_0, so dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0.01$

b) $a_n = \frac{3}{n+2}$ $\varepsilon = 0.1$

c) $a_n = \frac{2n+1}{4n}$ $\varepsilon = 0.01$

d) $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$ $\varepsilon = 0.01$

e) $a_n = \frac{4n}{2n^2 + 9n}$ $\varepsilon = 0.1$

f) $a_n = \frac{4n}{2n - 1}$ $\varepsilon = 0.01$

g) $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$ $\varepsilon = 0.01$

17.10 Beurteilen Sie, ob die folgenden reellen Zahlenfolgen konvergent oder divergent sind.

Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert g.
Beurteilen Sie im Falle der Divergenz, ob die Zahlenfolge gegen ∞ oder -∞ strebt.

a) $<a_n> = \left\langle \frac{(1-2n)^3}{1+n^3} \right\rangle$

b) $<a_n> = \left\langle \frac{2n^2 - n}{n^2 + n - 1} \right\rangle$

c) $<a_n> = \left\langle \frac{2n^2 - 3}{4n} \right\rangle$

d) $<a_n> = \left\langle \frac{3^n}{n^2} \right\rangle$

e) $<a_n> = \left\langle \frac{3^n - 3^{n-1}}{2 + 3^n} \right\rangle$

f) $<a_n> = \left\langle \frac{6n - n^2}{5n - 4} \right\rangle$

g) $<a_n> = 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$

h) $<a_n> = 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$

i) $<a_n> = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{2}{3}, \frac{9}{11}, \frac{5}{7}, \frac{11}{13}, \ldots$

j) $<a_n> = 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$

Lösungen

17.1 a) $\langle a_n \rangle = 1 , 2 , \frac{9}{2} , \frac{32}{3} , \frac{625}{24} , ...$ b) $\langle a_n \rangle = 1 , -\frac{1}{2} , \frac{2}{9} , -\frac{3}{32} , \frac{24}{625} , ...$

17.2 siehe Papula 1

17.3 a) $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$

c) $a_n = \frac{n^2-1}{2n}$ d) $a_n = \frac{2^n-1}{2n-1}$

17.4 a) $a_n = \frac{3}{2} n$ b) $a_n = (-1)^n (3n-7)$

c) $a_n = (-1)^n \frac{n-8}{2}$

17.5 a) $-117 = a_{25}$ -3225 ist kein Folgenglied

b) $-30 = a_{10}$ $-450 = a_{25}$

c) $\frac{1}{18} = a_{12}$ 10 ist kein Folgenglied

d) $\frac{1}{64} = a_6$ -2 ist kein Folgenglied

17.6 a) $\langle a_n \rangle = 1 , 3 , 7 , 15 , 31 , 63 , 127 , 255 , 511 , 1023 , \ldots$

b) $\langle a_n \rangle = 2 , 5 , 11 , 23 , 47 , 95 , 191 , 383 , 767 , 1535 , \ldots$

c) $\langle a_n \rangle = 1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , 22 , 29 , 37 , 46 , \ldots$

d) $\langle a_n \rangle = 2 , 3 , 5 , 8 , 12 , 17 , 23 , 30 , 38 , 47 , \ldots$

e) $\langle a_n \rangle = 0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , \ldots$

17.7 a) $\langle a_n \rangle = 7 , 4 , 1 , -2 , -5 , \ldots$ $a_n = 10 - 3n$

b) $\langle a_n \rangle = 1 , 4 , 13 , 40 , 121 , \ldots$ $a_n = \frac{1}{2} (3^n - 1)$

c) $\langle a_n \rangle = -4 , 1 , 6 , 11 , 16 , \ldots$ $a_n = 5n - 9$

d) siehe 17.6 c) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

e) $\langle a_n \rangle = 1 , -1 , -2 , -1 , 1 , 2 , 1 , -1 , -2 , 1 , -1 , \ldots$ $a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{falls n nicht durch 3 teilbar ist} \\ (-1)^n \cdot 2 & \text{falls n durch 3 teilbar ist} \end{cases}$

17.8 siehe Papula

17.9 a) i) $g = 0$ ii) $n_0 = 10'001$

b) i) $g = 0$ ii) $n_0 = 29$

c) i) $g = \frac{1}{2}$ ii) $n_0 = 26$

d) i) $g = 0$ ii) $n_0 = 51$

	e)	i)	$g = 0$	ii)	$n_0 = 16$
	f)	i)	$g = 2$	ii)	$n_0 = 101$
	g)	i)	$g = 1$	ii)	$n_0 = 10$

17.10	a)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = -8$
	b)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = 2$
	c)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \to \infty \ (n \to \infty)$
	d)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \to \infty \ (n \to \infty)$
	e)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = \frac{2}{3}$
	f)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \to -\infty \ (n \to \infty)$
	g)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \nrightarrow \infty \ (n \to \infty)$, $a_n \nrightarrow -\infty \ (n \to \infty)$
	h)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = 0$
	i)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = 1$
	j)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \nrightarrow \infty \ (n \to \infty)$, $a_n \nrightarrow -\infty \ (n \to \infty)$