# Aufgaben 20 — Grenzwert einer Funktion
# Grenzwert einer Funktion, Grenzwertsätze, Stetigkeit

### Lernziele

- verstehen, was der Grenzwert einer Funktion ist.
- verstehen, was der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert einer Funktion ist.
- die symbolische Schreibweise für den Grenzwert einer Funktion kennen und korrekt anwenden können.
- einfachere Grenzwerte von Funktionen bestimmen können.
- die Grenzwertsätze anwenden können.
- beurteilen können, ob eine einfachere Funktion an einer bestimmten Stelle stetig ist oder nicht.

### Aufgaben

20.1 Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen $f_1$ und $f_2$:

$f_1$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_1(x) = 3x$ $\qquad$ $f_2$: $\mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_2(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$

a) Skizzieren Sie die Grafen der beiden Funktionen $f_1$ und $f_2$.

b) Beurteilen Sie für beide Funktionen $f_1$ und $f_2$, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
"Die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert, besitzt an dieser Stelle jedoch einen Grenzwert."

20.2 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen über den Grenzwert einer Funktion wahr oder falsch sind:

a) "Wenn an einer Stelle $x_0$ sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle $x_0$."

b) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle $x_0$ existiert, dann existiert an dieser Stelle $x_0$ sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert."

c) "Wenn an einer Stelle $x_0$ sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide gleich gross sind, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle $x_0$."

d) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle $x_0$ nicht existiert, dann existiert an dieser Stelle $x_0$ entweder der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert nicht."

e) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle $x_0$ existiert, dann ist er gleich gross wie der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle $x_0$."

f) "Wenn die Funktion an der Stelle $x_0$ definiert ist, dann existiert an dieser Stelle $x_0$ der Grenzwert."

g) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle $x_0$ existiert, dann ist die Funktion an dieser Stelle $x_0$ definiert."

20.3 Papula 1: 312/4 (298/4), 312/5 (298/5), 312/6 (298/6)

20.4 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{2x + 3}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x \to 5/2} \frac{5 - 2x}{2x^2 - 3x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 3x + 2}$ $\qquad$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a + x)^2 - a^2}{x}$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{a + x} - \frac{1}{a}}{x}$

20.5 Papula 1: 313/8 (298/8), 313/9 (298/9), 319/10 (298/10)

**Lösungen**

20.1 a) ...

b) Die Funktionen $f_1$ und $f_2$ unterscheiden sich nur an der Stelle $x_0 = 2$:

$f_1$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ definiert und hat dort den Funktionswert $f_1(2) = 6$.
Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert: $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x) = 6$

$f_2$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.
Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert jedoch: $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x) = 6$

20.2 a) falsch

b) wahr

c) wahr

d) falsch

e) wahr

f) falsch

g) falsch

20.3 siehe Papula 1

20.4 a) $\frac{1}{2}$

b) 0

c) $-\frac{2}{7}$

d) 6

e) 2a

f) $-\frac{1}{a^2}$

20.5 siehe Papula 1