

Aufgaben 2

Ableitung

Elementare Ableitungsregeln, Kettenregel, Höhere Ableitungen

Lernziele

- die Faktor-, Summen-, Produkt-, Quotientenregel zur Bestimmung der Ableitung einfacherer Funktionen anwenden können.
- die Kettenregel zur Bestimmung der Ableitung einfacherer zusammengesetzter Funktionen anwenden können.
- höhere Ableitungen einfacherer Funktionen von Hand und mit Hilfe einer Ableitungs-Tabelle bestimmen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

Elementare Ableitungsregeln

2.1 Papula 1, Seite 414 (391) "Zu Abschnitt 2": 414/1 (391/1), 414/2 (391/2), 414/3 (391/3)

2.2 Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

- a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = \frac{\sin(x)}{x \cdot e^x}$
- b) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \rightarrow y = p(a) = 5ab (ac^2 + \sin(b))$
- c) $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, b \rightarrow y = q(b) = 5ab (ac^2 + \sin(b))$
- d) $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, c \rightarrow y = r(c) = 5ab (ac^2 + \sin(b))$

Kettenregel

2.3 Papula 1: 415/4 (392/4), 415/5 (392/5)

Höhere Ableitungen

2.4 Papula 1: 416/15 (393/15), 417/16 (394/16)

2.5 Eine Polynomfunktion k-ten Grades hat die folgende allgemeine Form:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_k \cdot x^k$$

- a) Bestimmen Sie ...
 - i) ... die 1. Ableitung f' .
 - ii) ... die 2. Ableitung f'' .
- b) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
"Die k-te Ableitung einer Polynomfunktion k-ten Grades ist eine konstante Funktion."

Lösungen

2.1 siehe Papula 1

- 2.2 a) $f': \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x)(1+x)}{x^2 e^x}$
b) $p': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \rightarrow y = p'(a) = 5b(2ac^2 + \sin(b))$
c) $q': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, b \rightarrow y = q'(b) = 5a(ac^2 + \sin(b) + b \cdot \cos(b))$
d) $r': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, c \rightarrow y = r'(c) = 10a^2bc$

2.3 siehe Papula 1

2.4 siehe Papula 1

- 2.5 a) i) $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x^3 + \dots + ka_k \cdot x^{k-1}$
ii) $f'': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f''(x) = 2a_2 + 6a_3 \cdot x + 12a_4 \cdot x^2 + 20a_5 \cdot x^3 + \dots + k(k-1)a_k \cdot x^{k-2}$
b) f' ist eine Polynomfunktion (k-1)-ten Grades.
 f'' ist eine Polynomfunktion (k-2)-ten Grades.
usw.
Bei jedem Ableiten reduziert sich der Grad der Polynomfunktion um 1.
Nach k-maligem Ableiten bleibt eine Polynomfunktion 0-ten Grades, also eine konstante Funktion.