Aufgaben 13 Lineare Abhängigkeit
Gauss-Jordan-Verfahren, Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit

Lernziele

- aus einem linearen Gleichungssystem die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix herauslesen können.
- die reduzierte Stufenform einer Matrix mit dem Gauss-Jordan-Verfahren bestimmen können.
- aus der reduzierten Stufenform einer erweiterten Koeffizientenmatrix die Lösungen des dazugehörigen linearen Gleichungssystems bestimmen können.
- beurteilen können, ob sich ein gegebener Vektor als Linearkombination anderer gegebener Vektoren ausdrücken lässt.
- einen Vektor als Linearkombination anderer Vektoren ausdrücken können.
- beurteilen können, ob eine Menge gegebener Vektoren linear abhängig bzw. unabhängig ist.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

13.1 Bearbeiten Sie für das gegebene lineare Gleichungssystem die folgenden Teilaufgaben:

i) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix an.

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens die reduzierte Stufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix.

iii) Geben Sie mit Hilfe des Resultates aus ii) die Lösung(en) des linearen Gleichungssystems an.

a) $x_1 + 2x_2 = 3$
$x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 18$
$3x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 30$

b) $x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$
$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$
$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5$

c) $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$
$x_1 + x_2 + x_3 = -2$
$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -6$

d) $2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1$
$-x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -13$
$4x_1 + 2x_2 - 16x_3 + 10x_4 = 0$
$x_2 + x_3 - x_4 = -1$

e) $x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 0$
$x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 10$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 5$
$4x_1 + 2x_2 + 9x_3 - 20x_4 = 5$

f) $2x_1 - 3x_2 = 11$
$-5x_1 + x_2 = -8$
$x_1 - 5x_2 = 16$

g) $2x_1 - 3x_2 = 11$
$-5x_1 + x_2 = -8$
$x_1 - 4x_2 = 16$

h) $-x_1 + 2x_2 = 1$
$2x_1 - 4x_2 = -2$
$3x_1 - 6x_2 = -3$

i) $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1$

j) $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2$

k) Lineares Gleichungssystem aus der Aufgabe 12.12 (Statisches Gleichgewicht eines Balkens)

13.2 Zeigen Sie, dass sich jeder m-dimensionale Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der folgenden m Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ ausdrücken lässt:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad \vec{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13.3 Beurteilen Sie, ob sich der Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ ausdrücken lässt.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

13.4 Begründen Sie schlüssig, dass die folgenden Aussagen über die lineare Abhängigkeit von Vektoren wahr sind.

a) Eine Menge von Vektoren, in welcher ein Vektor ein Vielfaches eines anderen Vektors ist, ist linear abhängig.

b) Eine Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

c) Eine Menge von Vektoren, welche eine linear abhängige Teilmenge von Vektoren enthält, ist linear abhängig.

d) Jede Teilmenge einer Menge linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig.

e) Jede Menge von mehr als m m-dimensionalen Vektoren ist linear abhängig.

f) Die m m-dimensionalen Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ (siehe Aufgabe 13.2) sind linear unabhängig.

g) Zwei oder mehr als zwei kollineare (d.h. parallel zur gleichen Gerade liegende) Vektoren sind linear abhängig.

h) Drei oder mehr als drei komplanare (d.h. parallel zur gleichen Ebene liegende) Vektoren sind linear abhängig.

13.5 (siehe nächste Seite)

13.5 Papula 2: 157/13, 157/14, 157/15, 158/16, 158/17

Hinweise:
- Verwenden Sie zur Bearbeitung der Aufgaben 157/14 bis 158/17 den Satz zuunterst auf der Seite 1 des Theorie-Blattes "Lineare Abhängigkeit".
- Die Lösungswege zu den Aufgaben 157/14 bis 158/17 im Buch Papula 2 basieren auf den Begriffen "Determinante" und "Rang", die wir im Unterricht noch nicht behandelt haben.

13.6 Betrachten Sie den folgenden Satz über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren (vgl. Theorie-Blatt):

Satz: "Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

nur erfüllt werden kann mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0."$$

Dieser Satz verknüpft zwei Aussagen A und B: Er drückt aus, dass die beiden Aussagen äquivalent bzw. gleichwertig sind: $A \Leftrightarrow B$

$A \Leftrightarrow B$ ("A ist äquivalent zu B.") bedeutet sowohl $A \Rightarrow B$ ("Aus A folgt B.") als auch $B \Rightarrow A$ ("Aus B folgt A."). Wenn A wahr ist, ist auch B wahr. Und wenn B wahr ist, ist auch A wahr.

In der Aussagenlogik wird dies so geschrieben: $(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
(Das Zeichen $\wedge$ ist ein Symbol aus der Aussagenlogik und bedeutet "und".)

a) Was für zwei Aussagen A und B sind gemeint?
Formulieren Sie die beiden Aussagen A und B, die der Satz verknüpft, separat.

b) Formulieren Sie für die Aussagen A und B …
   i) … die Folgerung $A \Rightarrow B$ in Worten.
   ii) … die Folgerung $B \Rightarrow A$ in Worten.

Generell kann man aus der Folgerung $A \Rightarrow B$ ("Aus A folgt B.") die Folgerung $\neg B \Rightarrow \neg A$ ("Aus Nicht-A folgt Nicht-B.") schliessen. Wenn B nicht wahr ist, ist auch A nicht wahr.
(Das Zeichen $\neg$ ist ein Symbol aus der Aussagenlogik und bedeutet "nicht".)

Analog kann man aus der Folgerung $B \Rightarrow A$ die Folgerung $\neg A \Rightarrow \neg B$ schliessen.

c) Formulieren Sie für die Aussagen A und B …
   i) … die Folgerung $\neg B \Rightarrow \neg A$ in Worten.
   ii) … die Folgerung $\neg A \Rightarrow \neg B$ in Worten.

Da der vorliegende Satz aus den Folgerungen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ besteht, ist er vollständig bewiesen, wenn gezeigt ist, dass die beiden Folgerungen $\neg B \Rightarrow \neg A$ und $\neg A \Rightarrow \neg B$ richtig sind.

d) Zeigen Sie für den Satz, dass die nachstehenden Folgerungen richtig sind:
   i) $\neg B \Rightarrow \neg A$
   ii) $\neg A \Rightarrow \neg B$

Lösungen

13.1 a) i) $A|c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 & 18 \\ 3 & 13 & 4 & 30 \end{pmatrix}$

ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 3, 0)$
genau eine Lösung

b) i) $A|c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(x_1, x_2, x_3) = (1 + 2\lambda, 1, \lambda)$
unendlich viele Lösungen (1 freier Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}$)

c) i) $A|c = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) keine Lösung

d) i) $A|c = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 8 & 8 & -4 & -13 \\ 4 & 2 & -16 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, -2, 1, 0)$
genau eine Lösung

e) i) $A|c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -5 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & 5 \end{pmatrix}$

ii) $\text{rref}(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-2\lambda + 5\mu, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \lambda, \mu\right)$
unendlich viele Lösungen (2 freie Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$)

f) i) $A|c = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -5 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & 16 \end{pmatrix}$

ii) rref(A|c) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(x_1, x_2) = (1, -3)$
genau eine Lösung

g) i) A|c = $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -5 & 1 & -8 \\ 1 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

ii) rref(A|c) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) keine Lösung

h) i) A|c = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

ii) rref(A|c) = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(x_1, x_2) = (-1 + 2\lambda, \lambda)$
unendlich viele Lösungen (1 freier Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}$)

i) i) A|c = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

ii) rref(A|c) = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) keine Lösung

j) i) A|c = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

ii) rref(A|c) = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(x_1, x_2, x_3) = (-1 + 2\lambda + \mu, \lambda, \mu)$
unendlich viele Lösungen (2 freie Parameter: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$)

k) i) A|c = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & F_{GB} \\ 0 & 0 & \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & \frac{1}{2}\cos(\alpha)\cdot F_{GB} \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\cos(\alpha)\cdot F_{GB} \end{pmatrix}$

ii) rref(A|c) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cot(\alpha) & \frac{1}{2}\cot(\alpha)\cdot F_{GB} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & F_{GB} \\ 0 & 0 & 1 & -\cot(\alpha) & \frac{1}{2}\cot(\alpha)\cdot F_{GB} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) $(F_{Ax}, F_{Ay}, F_s, F_{GL}) = \left(\cot(\alpha)\left(F_{GL}+\frac{1}{2}F_{GB}\right), F_{GL}+F_{GB}, \cot(\alpha)\left(F_{GL}+\frac{1}{2}F_{GB}\right), F_{GL}\right)$
unendlich viele Lösungen (1 freier Parameter: $F_{GL} \in \mathbb{R}^+$)

13.2 …

13.3 a) $\vec{a} = -2\cdot\vec{a}_2$

b) $\vec{a} = 2\cdot\vec{a}_1 + \vec{a}_2$

c) $\vec{a}$ kann nicht als Linearkombination von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ ausgedrückt werden.

d) $\vec{a} = -2\cdot\vec{a}_1 + 3\cdot\vec{a}_2$

13.4 a) …

b) …

c) …

d) …

e) …

f) …

13.5 157/13: siehe Papula 2

157/14: …

157/15: …
$\vec{c} = 4\vec{a} + \vec{b}$

158/16: …

158/17: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$

13.6 a) Aussage A:
"Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist linear unabhängig."

Aussage B:
"Die Gleichung $\lambda_1\cdot \vec{a}_1 + \lambda_2\cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ kann nur erfüllt werden mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$."

b) i) "Wenn eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ linear unabhängig ist, dann kann die Gleichung $\lambda_1\cdot \vec{a}_1 + \lambda_2\cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden."

ii) "Wenn die Gleichung $\lambda_1\cdot \vec{a}_1 + \lambda_2\cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann, dann ist die Menge der Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ linear unabhängig."

c) i) "Wenn die Gleichung $\lambda_1\cdot \vec{a}_1 + \lambda_2\cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nicht nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann, dann ist die Menge der Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ linear abhängig."

ii) "Wenn eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ linear abhängig ist, dann kann die Gleichung $\lambda_1\cdot \vec{a}_1 + \lambda_2\cdot \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ nicht nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden."

d) i) …

ii) …