

# Lineare Abhängigkeit

## Linearkombination von Vektoren

Def.: Eine Summe von Vielfachen von Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ :

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \vec{a}_k \quad (\lambda_k \in \mathbb{R})$$

Bsp.: Der Vektor  $\vec{a}$  kann als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  und  $\vec{a}_3$  geschrieben werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} = \vec{a}_1 - 2 \cdot \vec{a}_2 + 3 \cdot \vec{a}_3$$

## Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Vektoren

Def.: Ein **Vektor**  $\vec{a}$  ist von den Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  **linear abhängig**, wenn er sich als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt.

Ein **Vektor**  $\vec{a}$  ist von den Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  **linear unabhängig**, wenn er sich **nicht** als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt.

Eine **Menge von Vektoren**  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  ist **linear abhängig**, wenn sich **mindestens ein** Vektor aus dieser Menge als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen lässt.

Eine **Menge von Vektoren**  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  ist **linear unabhängig**, wenn sich **kein** Vektor aus dieser Menge als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen lässt.

Bem.: Mit den folgenden beiden Aussagen wird das gleiche gemeint:

"Eine Menge von Vektoren  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  **ist** linear abhängig bzw. unabhängig."

"Die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  **sind** linear abhängig bzw. unabhängig."

**Satz:** Eine Menge von Vektoren  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  ist genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

nur erfüllt werden kann mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

(Beweis siehe Aufgabe 13.6)

## Rang

**Def.:** Der **Rang** einer Matrix  $A$ , bezeichnet mit  $\mathbf{Rg}(A)$ , ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren von  $A$ .

**Beh.:** Bei jeder Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren gleich gross wie die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.  
(ohne Beweis)

Der Rang einer  $m \times n$ -Matrix  $A$  ist mindestens 1 und höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen  $m$  und  $n$ , d.h.  $1 \leq \mathbf{Rg}(A) \leq \min(m, n)$

(Beweis folgt aus der vorangehenden Behauptung und aus der Definition des Ranges)

Wendet man auf eine Matrix eine elementare Zeilenoperation an, so bleibt der Rang der Matrix unverändert. Insbesondere gilt:  $\mathbf{Rg}(A) = \mathbf{Rg}(\text{rref}(A))$

(ohne Beweis)

## Determinante

**Def.:** Die **Determinante** einer Matrix  $A$ , bezeichnet mit  $\mathbf{det}(A)$ , ist nur definiert, falls  $A$  quadratisch ist.

1-reihige Determinante

$$A = (a_{11})$$
$$\mathbf{det}(A) := a_{11}$$

2-reihige Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

3-reihige Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

( $n$ -reihige Determinanten mit  $n > 3$  werden hier nicht behandelt)

**Beh.:** Bei einer  $3 \times 3$ -Matrix  $A$  ist die Determinante von  $A$  gleich dem Spatprodukt der Spaltenvektoren von  $A$ .  
(Beweis folgt aus den Definitionen der 3-reihigen Determinante und des Spatproduktes)

Alle Zeilen- bzw. Spaltenvektoren einer quadratischen Matrix  $A$  sind genau dann linear unabhängig, wenn  $\mathbf{det}(A) \neq 0$ .

(ohne Beweis)

Für jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  gilt:

$$\mathbf{Rg}(A) = n \Leftrightarrow \mathbf{det}(A) \neq 0$$

$$\mathbf{Rg}(A) < n \Leftrightarrow \mathbf{det}(A) = 0$$

(Beweis folgt aus der vorangehenden Behauptung und aus der Definition des Ranges)

**Def.:** Eine quadratische Matrix  $A$  heisst **regulär**, falls  $\mathbf{det}(A) \neq 0$ .  
Eine quadratische Matrix  $A$  heisst **singulär**, falls  $\mathbf{det}(A) = 0$ .