

Aufgaben 17 **Reelle Zahlenfolgen** **Bildungsgesetz, Rekursive Definition, Grenzwert einer Zahlenfolge**

Lernziele

- aus dem Bildungsgesetz einer reellen Zahlenfolge die einzelnen Folgenglieder bestimmen können.
- das Bildungsgesetz einfacherer reeller Zahlenfolgen bestimmen können.
- aus der rekursiven Definition einer reellen Zahlenfolge die einzelnen Folgenglieder bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine einfachere reelle Zahlenfolge konvergent oder divergent ist.
- den Grenzwert einer einfacheren konvergenten Zahlenfolge bestimmen können.

Aufgaben

17.1 Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ aus ihrem Bildungsgesetz:

a) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

b) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n!}{n^n}$

Bemerkung:

- Mit $n!$ ($n \in \mathbb{N}$) wird die Fakultät von n bezeichnet: $n! := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Bsp.: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

17.2 Papula 1: $312/1, 312/2$

17.3 Finden Sie das Bildungsgesetz der folgenden Zahlenfolgen:

a) $\langle a_n \rangle = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots$

b) $\langle a_n \rangle = \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \dots$

c) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{15}{8}, \frac{12}{5}, \frac{35}{12}, \frac{24}{7}, \dots$

d) $\langle a_n \rangle = 1, 1, \frac{7}{5}, \frac{15}{7}, \frac{31}{9}, \frac{63}{11}, \frac{127}{13}, \dots$

17.4 Setzen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen jeweils um 4 weitere Glieder fort, und geben Sie jeweils das Bildungsgesetz an:

a) $\langle a_n \rangle = \frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, \dots$

b) $\langle a_n \rangle = 4, -1, -2, 5, -8, \dots$

c) $\langle a_n \rangle = \frac{7}{2}, -3, \frac{5}{2}, -2, \dots$

17.5 Untersuchen Sie, welche der angegebenen Zahlen Glieder der jeweiligen Zahlenfolge sind:

a) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 8 - 5n$

Zahlen: -117, -3225

b) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = 7n - n^2$

Zahlen: -30, -450

c) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{12+3n}{6n^2}$

Zahlen: $10, \frac{1}{18}$

d) $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = (-1)^n 2^{-n}$

Zahlen: $-2, \frac{1}{64}$

17.6 Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der rekursiv definierten Folgen $\langle a_n \rangle$:

a) $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1$

b) $a_1 = 2, a_n = 2a_{n-1} + 1$

c) $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n - 1$

d) $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + n - 1$

e) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
(Fibonacci-Folge)

Lösungen

17.1 a) $\langle a_n \rangle = 1, 2, \frac{9}{2}, \frac{32}{3}, \frac{625}{24}, \dots$

b) $\langle a_n \rangle = 1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{32}, \frac{24}{625}, \dots$

17.2 siehe Papula 1

17.3 a) $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$

c) $a_n = \frac{n^2-1}{2n}$

d) $a_n = \frac{2^n-1}{2n-1}$

17.4 a) $a_n = \frac{3}{2}n$

b) $a_n = (-1)^n (3n-7)$

c) $a_n = (-1)^n \frac{n-8}{2}$

17.5 a) $-117 = a_{25}$ -3225 ist kein Folgenglied

b) $-30 = a_{10}$ $-450 = a_{25}$

c) $\frac{1}{18} = a_{12}$ 10 ist kein Folgenglied

d) $\frac{1}{64} = a_6$ -2 ist kein Folgenglied

17.6 a) $\langle a_n \rangle = 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, \dots$

b) $\langle a_n \rangle = 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, \dots$

c) $\langle a_n \rangle = 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, \dots$

d) $\langle a_n \rangle = 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \dots$

e) $\langle a_n \rangle = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

17.7 a) $\langle a_n \rangle = 7, 4, 1, -2, -5, \dots$

$a_n = 10 - 3n$

b) $\langle a_n \rangle = 1, 4, 13, 40, 121, \dots$

$a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

c) $\langle a_n \rangle = -4, 1, 6, 11, 16, \dots$

$a_n = 5n - 9$

d) siehe 17.6 c)

$a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

e) $\langle a_n \rangle = 1, -1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, \dots$

$a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{falls } n \text{ nicht durch } 3 \text{ teilbar ist} \\ (-1)^n \cdot 2 & \text{falls } n \text{ durch } 3 \text{ teilbar ist} \end{cases}$

17.8 siehe Papula

17.9 a) i) $g = 0$ ii) $n_0 = 10'001$

b) i) $g = 0$ ii) $n_0 = 29$

c) i) $g = \frac{1}{2}$ ii) $n_0 = 26$

d) i) $g = 0$ ii) $n_0 = 51$

e) i) $g = 0$ ii) $n_0 = 16$

- | | | | | | |
|-------|----|----------------------------------|---------|---|-------------|
| | f) | i) | $g = 2$ | ii) | $n_0 = 101$ |
| | g) | i) | $g = 1$ | ii) | $n_0 = 10$ |
| 17.10 | a) | $\langle a_n \rangle$ konvergent | | $g = -8$ | |
| | b) | $\langle a_n \rangle$ konvergent | | $g = 2$ | |
| | c) | $\langle a_n \rangle$ divergent | | $a_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) | |
| | d) | $\langle a_n \rangle$ divergent | | $a_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) | |
| | e) | $\langle a_n \rangle$ konvergent | | $g = \frac{2}{3}$ | |
| | f) | $\langle a_n \rangle$ divergent | | $a_n \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$) | |
| | g) | $\langle a_n \rangle$ divergent | | $a_n \nrightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $a_n \nrightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$) | |
| | h) | $\langle a_n \rangle$ konvergent | | $g = 0$ | |
| | i) | $\langle a_n \rangle$ konvergent | | $g = 1$ | |
| | j) | $\langle a_n \rangle$ divergent | | $a_n \nrightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), $a_n \nrightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$) | |