

## Aufgaben 15      Anwendungen der Differentialrechnung Relative Maxima/Minima, Wendepunkte

### Lernziele

- die relativen Maxima und Minima einer Funktion bestimmen können.
- die Wendepunkte einer Funktion bestimmen können.
- das absolute Maximum und das absolute Minimum einer Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können.
- das absolute Minimum einer Durchschnittskostenfunktion bestimmen können.

### Aufgaben

15.1 Bestimmen Sie für jede Funktion ...

- i) ... die relativen Maxima und Minima.
- ii) ... die Wendepunkte.
  
- a)  $f(x) = x^2 - 4$
- b)  $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$
- c)  $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$
- d)  $f(x) = x e^{-x}$
- e) \*  $f(x) = (1 - e^{-2x})^2$
- f) \*  $V(r) = -D \left( \frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (D > 0, a > 0)$

15.2 Angenommen, der Gesamtgewinn (in CHF) bei der Herstellung und dem Verkauf einer Ware beträgt

$$G(x) = 2000x + 20x^2 - x^3$$

wobei  $x$  die verkaufte Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die Stückzahl  $x$  bei maximalem Gewinn, und bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst das relative Maximum.
- Prüfen Sie dann nach, ob das relative Maximum das absolute Maximum ist.

15.3 Angenommen, die Gesamtkosten (in 100 CHF) für die Organisation und Bereitstellung einer Dienstleistung im Bereich des Sport Managements sind gegeben durch

$$K(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 100$$

wobei  $x$  ein Mass für den Umfang der Dienstleistung ist. Welcher Wert für  $x$  führt zu minimalen Durchschnittskosten? Bestimmen Sie die minimalen Durchschnittskosten.

15.4 Angenommen, die Produktionskapazität für eine bestimmte Ware kann 30 nicht überschreiten. Der Gesamtgewinn (in CHF) dieser Firma ist

$$G(x) = 4x^3 - 210x^2 + 3600x$$

wobei  $x$  die verkaufte Stückzahl ist. Bestimmen Sie die Stückzahl  $x$ , welche den Gewinn maximiert.

15.5 (siehe nächste Seite)

15.5 Angenommen, der jährliche Gewinn (in 1000 CHF) eines Geschäfts ist gegeben durch

$$G(x) = -0.1x^3 + 3x^2$$

wobei  $x$  die Anzahl Jahre nach 2010 ist. Bestimmen Sie für diese Modellannahme den Wendepunkt für den Gewinn.

15.6 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Falls  $f$  ein relatives Maximum bei  $x = x_0$  hat, kann gefolgert werden, dass ...

...  $f(x_0) > f(x)$  für jedes  $x \neq x_0$

...  $f(x_0) > f(x)$  für jedes  $x > x_0$

...  $f(x_0) > f(x)$  für jedes  $x < x_0$

...  $f(x_0) > f(x)$  für alle  $x$  in einer gewissen Umgebung von  $x_0$

b) Falls  $f(x_0) < 0$ ,  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \neq 0$ , kann gefolgert werden, dass  $f$  ...

... kein relatives Minimum bei  $x = x_0$  hat.

... kein relatives Maximum bei  $x = x_0$  hat.

... keinen Wendepunkt bei  $x = x_0$  hat.

... einen Wendepunkt bei  $x = x_0$  hat.

c) Das absolute Maximum einer Funktion ...

... ist immer ein relatives Maximum.

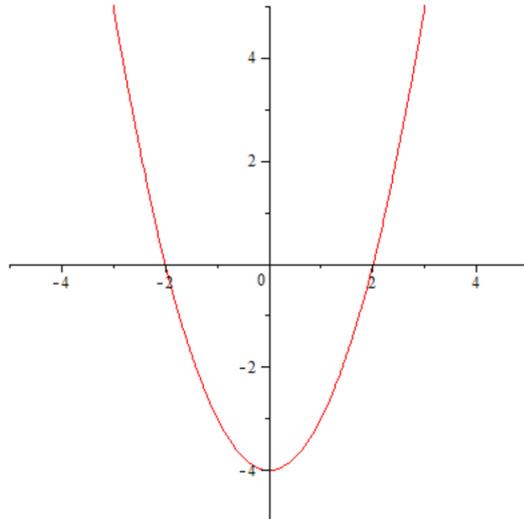
... kann ein relatives Minimum sein.

... kann ein relatives Maximum sein.

... existiert immer.

**Lösungen**

15.1 a)  $f(x) = x^2 - 4$



$$f'(x) = 2x$$

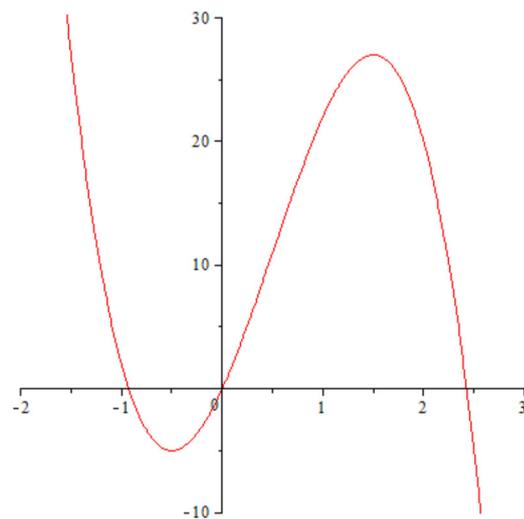
$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

i)  $f'(x) = 0$  bei  $x_1 = 0$   
 $f''(x_1) = 2 > 0$   $\Rightarrow$  relatives Minimum bei  $x_1 = 0$   
kein relatives Maximum

ii)  $f''(x) = 2 \neq 0$  für alle  $x$   $\Rightarrow$  kein Wendepunkt

b)  $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$



$$f'(x) = -24x^2 + 24x + 18$$

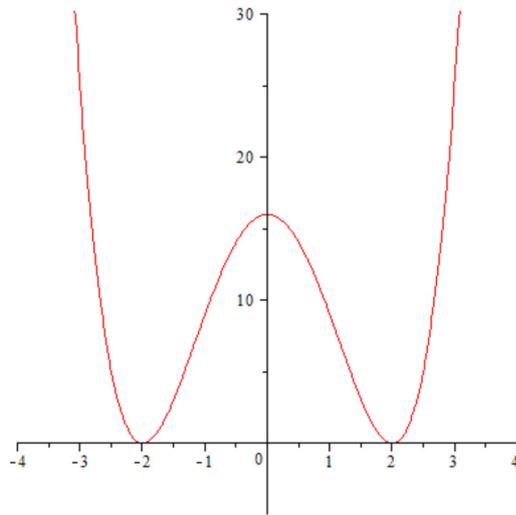
$$f''(x) = -48x + 24$$

$$f'''(x) = -48$$

i)  $f'(x) = 0$  bei  $x_1 = -\frac{1}{2}$  und  $x_2 = \frac{3}{2}$   
 $f''(x_1) = 48 > 0$   $\Rightarrow$  relatives Minimum bei  $x_1 = -\frac{1}{2}$   
 $f''(x_2) = -48 < 0$   $\Rightarrow$  relatives Maximum bei  $x_2 = \frac{3}{2}$

ii)  $f''(x) = 0$  bei  $x_3 = \frac{1}{2}$   
 $f'''(x_3) = -48 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$  Wendepunkt bei  $x_3 = \frac{1}{2}$

c)  $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$

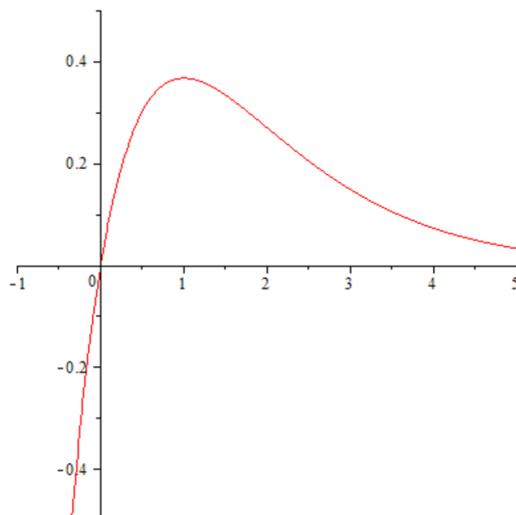


$s'(t) = 4t^3 - 16t$   
 $s''(t) = 12t^2 - 16$   
 $s'''(t) = 24t$

i)  $s'(t) = 0$  bei  $t_1 = 0, t_2 = -2$  und  $t_3 = 2$   
 $s''(t_1) = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad$  relatives Maximum bei  $t_1 = 0$   
 $s''(t_2) = 32 > 0 \quad \Rightarrow \quad$  relatives Minimum bei  $t_2 = -2$   
 $s''(t_3) = 32 > 0 \quad \Rightarrow \quad$  relatives Minimum bei  $t_3 = 2$

ii)  $s''(t) = 0$  bei  $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$  und  $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $s'''(t_4) = -\frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$  Wendepunkt bei  $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $s'''(t_5) = \frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$  Wendepunkt bei  $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

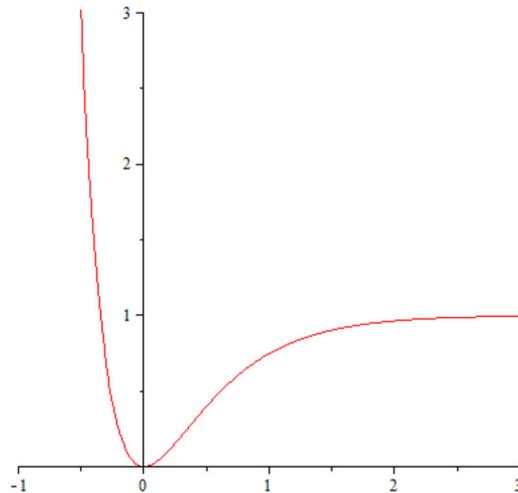
d)  $f(x) = x e^{-x}$



$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}$   
 $f''(x) = -e^{-x} - (1 - x) e^{-x} = (x - 2) e^{-x}$   
 $f'''(x) = e^{-x} - (x - 2) e^{-x} = (3 - x) e^{-x}$

- i)  $f'(x) = 0$  bei  $x_1 = 1$   
 $f''(x_1) = -\frac{1}{e} < 0$   $\Rightarrow$  relatives Maximum bei  $x_1 = 1$   
 kein relatives Minimum
- ii)  $f''(x) = 0$  bei  $x_2 = 2$   
 $f'''(x_2) = \frac{1}{e^2} \neq 0$   $\Rightarrow$  Wendepunkt bei  $x_2 = 2$

e) \*  $f(x) = (1 - e^{-2x})^2 = 1 - 2e^{-2x} + e^{-4x}$



$$f'(x) = 4(e^{-2x} - e^{-4x})$$

$$f''(x) = 8(-e^{-2x} + 2e^{-4x})$$

$$f'''(x) = 16(e^{-2x} - 4e^{-4x})$$

- i)  $f'(x) = 0$  bei  $x_1 = 0$   
 $f''(x_1) = 8 > 0$   $\Rightarrow$  relatives Minimum bei  $x_1 = 0$   
 kein relatives Maximum
- ii)  $f''(x) = 0$  bei  $x_2 = \frac{\ln(2)}{2} = 0.34\dots$   
 $f'''(x_2) = -8 \neq 0$   $\Rightarrow$  Wendepunkt bei  $x_2 = 0.34\dots$

f) \*  $V'(r) = -D\left(-\frac{2a}{r^2} + \frac{2a^2}{r^3}\right) = \frac{2aD}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$   
 $V''(r) = -D\left(\frac{4a}{r^3} - \frac{6a^2}{r^4}\right) = \frac{2aD}{r^3}\left(\frac{3a}{r} - 2\right)$   
 $V'''(r) = -D\left(-\frac{12a}{r^4} + \frac{24a^2}{r^5}\right) = \frac{12aD}{r^4}\left(1 - \frac{2a}{r}\right)$

- i)  $V'(r) = 0$  bei  $r_1 = a$   
 $V''(r_1) = \frac{2D}{a^2} > 0$   $\Rightarrow$  relatives Minimum bei  $r_1 = a$   
 kein relatives Maximum
- ii)  $V''(r) = 0$  bei  $r_2 = \frac{3a}{2}$   
 $V'''(r_2) = -\frac{64D}{81a^3} \neq 0$   $\Rightarrow$  Wendepunkt bei  $r_2 = \frac{3a}{2}$

15.2 **Relatives** Maximum bei  $x_1 = \frac{100}{3} \rightarrow 33$  oder 34

$$G(33) = 51'843 \text{ CHF}$$

$$G(34) = 51'816 \text{ CHF}$$

$G(x) < G(x_1)$  falls  $x \neq x_1$ , da es kein relatives Minimum gibt

$\Rightarrow G = 51'843 \text{ CHF}$  ist der **absolute** maximale Gewinn bei  $x = 33$ .

15.3 (siehe nächste Seite)

- 15.3  $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{1}{4}x + 4 + \frac{100}{x}$   
 $\bar{K}(x)$  hat ein **relatives** Minimum bei  $x_1 = 20$   
 $\bar{K}(20) = 1400$  CHF  
 $\bar{K}(x) > \bar{K}(x_1)$  falls  $x \neq x_1$ , da es kein relatives Maximum gibt  
 $\Rightarrow \bar{K} = 1400$  CHF sind die **absoluten** minimalen Durchschnittskosten bei  $x = 20$ .
- 15.4  $G(x)$  hat ein **relatives** Maximum bei  $x_1 = 15$  und ein **relatives** Minimum bei  $x_2 = 20$ .  
 $G(x_1) = 20'250$  CHF  
 $G(x) < G(x_1)$  falls  $x < x_1$ , da es kein relatives Minimum auf dem Intervall  $x < x_1$  gibt  
 $G(30) = 27'000$  CHF  $> 20'250$  CHF (!)  
 $\Rightarrow G = 27'000$  CHF ist der **absolute** maximale Gewinn am Endpunkt  $x = 30$ .
- 15.5  $G(x)$  hat einen Wendepunkt bei  $x_1 = 10$   
 $G(10) = 200$   
 $\Rightarrow$  Wendepunkt (10|200), d.h. wenn  $x = 10$  (im Jahr 2020) und  $G = 200'000$  CHF
- 15.6 a) 4. Aussage  
b) 3. Aussage  
c) 3. Aussage