

Aufgaben 1 Polynomfunktion Nullstellen, Linearfaktorzerlegung, Charakteristiken des Grafen

Lernziele

- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines Polynoms verstehen.
- die Produktform bzw. Linearfaktorzerlegung eines einfacheren Polynoms bestimmen können.
- die Regel zum Auffinden von ganzzahligen Nullstellen einer Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten anwenden können.
- charakteristische Eigenschaften einer Polynomfunktion kennen.
- eine neue Problemstellung erarbeiten können.

Aufgaben

1.1 Gegeben ist die folgende Polynomfunktion f vom Grad 3.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

- a) i) Überprüfen Sie, dass $x = 1$ eine **Nullstelle** von f ist.
ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:
$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$$
Stellen Sie fest, dass es **möglich** ist, $f(x)$ als Produkt des Linearfaktors $(x - 1)$ und eines Polynoms $g(x)$ darzustellen, wobei die Polynomfunktion g vom Grad 2 ist.
- b) i) Überprüfen Sie, dass $x = 2$ **keine Nullstelle** von f ist.
ii) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:
$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$$
Stellen Sie fest, dass es **nicht möglich** ist, $f(x)$ als Produkt des Linearfaktors $(x - 2)$ und eines Polynoms $g(x)$ darzustellen.
- c) $x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von f (siehe a)).
Bestimmen Sie die restlichen reellen Nullstellen von f , und stellen Sie $f(x)$ in der Produktform dar.

1.2 Bestimmen Sie die Produktform der folgenden Polynome:

- a) $f(x) = -2x^5 + 12x^4 - 2x + 12$
b) $f(x) = 3x^5 - 36x^4 + 141x^3 - 168x^2 - 108x + 240$

1.3 Betrachten Sie die allgemeine Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N}_0, a_n \neq 0)$$

Finden Sie charakteristische Eigenschaften des Grafen einer Polynomfunktion vom Grad n .
Gesucht sind Eigenschaften, die zwar von n , jedoch nicht von den konkreten Werten der Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ abhängen.

Hinweise:

- Betrachten Sie den Fundamentalsatz der Algebra (siehe Theorieblätter "Potenzfunktion").
- Überlegen Sie sich, dass der Summand höchsten Grade des Polynoms $f(x)$ das Verhalten des Funktionsgraphen für $x \rightarrow \pm\infty$ bestimmt.

Lösungen

- 1.1 a) i) ...
ii) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$
g mit $g(x) = x^2 - x - 6$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 2
- b) i) ...
ii) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 - 5 - \frac{4}{x-2}$
g mit $g(x) = x^2 - 5 - \frac{4}{x-2}$ ist keine Polynomfunktion
- c) $x_2 = 3, x_3 = -2$
 $f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$
- 1.2 a) $f(x) = -2(x - 6)(x^4 + 1)$
b) $f(x) = 3(x - 2)^2(x + 1)(x - 4)(x - 5)$
- 1.3 ...