Aufgaben 3 Anwendungen der Differentialrechnung Höhere Ableitungen, Steigen, Fallen, Krümmung, Rel. Extremstellen, Wendepunkte, Extremwertaufgaben, Änderungsrate

Lernziele

- höhere Ableitungen von Polynomfunktionen bestimmen können.
- den Zusammenhang zwischen der ersten Ableitung einer Funktion und dem Steigen und Fallen des Grafen der Funktion anwenden können.
- den Zusammenhang zwischen der zweiten Ableitung einer Funktion und dem Krümmungsverhalten des Grafen der Funktion anwenden können.
- relative Maxima, relative Minima und Wendepunkte einer Polynomfunktion bestimmen können.
- die Differentialrechnung zur Lösung von Extremwertaufgaben anwenden können.
- die Änderungsrate einer linearen Funktion elementar geometrisch bestimmen können.
- die Änderungsrate einer Polynomfunktion mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen können.

Aufgaben

Höhere Ableitungen

3.1 Eine Polynomfunktion k-ten Grades hat die folgende allgemeine Form:

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_k \cdot x^k$$

a) Bestimmen Sie ...

i) ... die 1. Ableitung f'.
ii) ... die 2. Ableitung f".

b) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
"Die k-te Ableitung einer Polynomfunktion k-ten Grades ist eine konstante Funktion."

3.2 Bestimmen Sie die verlangte höhere Ableitung für die entsprechende Funktion:

a) $f''(-1)$ für $f(x) = 3x^5$

b) $\ddot{s}(5)$ für $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

c) $S'''(2)$ für $S(T) = \alpha \cdot T^4$

Steigen, Fallen, Krümmung

3.3 Bestimmen Sie von der ebenen Kurve $y = 3\,(x - 2)^2\,(x - 1)$ alle Punkte mit waagrechter Tangente.

3.4 Bestimmen Sie alle Punkte der Kurve $y = \frac{1}{3} x^3 - x$, in welchen die Tangenten parallel zur Geraden $y = \frac{1}{4} x - 2$ verlaufen.

3.5 Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen f_1 und f_2:

$$f_1:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f_1(x) = -(x - 1)^2 + a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$f_2:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f_2(x) = x^2 + 2$$

Bestimmen Sie den Wert von a, damit sich die Grafen der beiden Funktionen in einem Punkt berühren.

3.6 (weggelassen)

3.101 Gegeben sei die Funktion f:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = f(x) = x^3 - ax^2 + 1.$$

Bestimmen Sie a so, dass der Graf von f die Gerade y = 5 berührt.

3.102 Gegeben sei die folgende ebene Kurve k:

$$k: \ y = x^3 + 8.$$

Bestimmen Sie ...

a) ... die Gleichung der Tangente an die Kurve k im Kurvenpunkt mit der Abszisse 1.

b) ... denjenigen Punkt, in dem die Tangente aus a) die Kurve k ein zweites Mal schneidet.

c) ... denjenigen Bereich, in dem Geraden, die parallel zur Tangente aus a) verlaufen, drei Schnittpunkte mit der Kurve k haben. Geben Sie den Bereich durch die Achsenabschnitte der Geraden auf der y-Achse an.

3.103 Gegeben sei die folgende ebene Kurve k:

$$k: \ y = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Die Kurve k hat im Punkt $P(1|0)$ eineTangente mit der Steigung -1. Die Abszissen der beiden anderen Schnittpunkte der Kurve k mit der x-Achse sind reziprok.

Bestimmen Sie a, b und c.

Relative Extremstellen, Wendepunkte

3.7 Gegeben ist eine Funktion f mit einem unbekannten Parameter p:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - px^2)$$

Bestimmen Sie von Hand ...

a) ... den Wert von p, damit f an der Stelle x = 1 einen Wendepunkt hat.

b) ... alle Stellen x, an welchen die Funktion f relative Extremstellen und Wendepunkte besitzt. Der Parameter p soll den in a) bestimmten Wert haben.

3.104 Der Graf einer Polynomfunktion vierten Grades ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und hat in $P(1|2)$ einen Wendepunkt. Die Tangente in P geht durch den Koordinatenursprung.

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.

Extremwertaufgaben

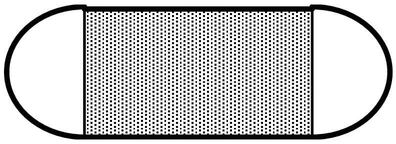
3.8 Bestimmen Sie, welche Fläche rechteckigen ebenen Geländes man mit einem 240 m langen Zaun höchstens umgeben kann.

3.9 Einer Kugel vom Radius 2 m soll ein senkrechter Kreiszylinder grössten Volumens einbeschrieben werden. Bestimmen Sie den Radius und die Höhe dieses Kreiszylinders.

3.10 (weggelassen)

3.11 (weggelassen)

3.12 In einem Leichtathletikstadion wird ein rechteckiges Feld (schraffiert) von einer Laufstrecke der Länge 400 m (fette Linie) umgeben:



Bei welcher Länge und Breite des rechteckigen Feldes ist dessen Fläche maximal?

3.13 Aus einem rechteckigen Blech der Länge 27 cm und der Breite 18 cm wird ein oben offener Kasten hergestellt. Dazu werden an den vier Ecken des Bleches gleich grosse Quadrate ausgeschnitten. Die dadurch erzeugten überstehenden Ränder werden rechtwinklig zu Kastenseiten hochgebogen.

Bestimmen Sie die Grösse der auszuschneidenden Quadrate, damit das Volumen des Kastens maximal wird.

3.105 Zwei Autos fahren mit konstanten Geschwindigkeiten im rechten Winkel auf eine Kreuzung zu. Zu einem bestimmte Zeitpunkt sind sie je 1 km von der Kreuzung entfernt. Der erste Wagen fährt mit der 90 km/h, der zweite mit 72 km/h.

Bestimmen Sie die Stellung, in der die beiden Autos am wenigsten weit voneinander entfernt sind.

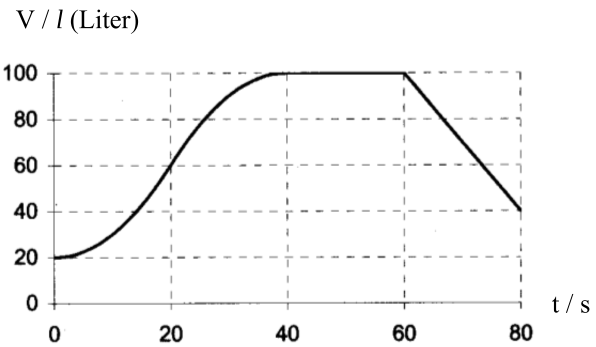
3.106 Aus einem zylindrischen Baumstamm vom Durchmesser d soll ein Balken grösster Tragfähigkeit mit rechteckigem Querschnitt herausgeschnitten werden. Nach den Gesetzen der Festigkeitslehre muss das sogenannte Widerstandsmoment W maximal sein:

$W = k \cdot x \cdot y^2$ (x = Breite des Balkens, y = Höhe des Balkens, k = Proportionalitätskonstante)

Bestimmen Sie die Abmessungen des Querschnitts.

Änderungsrate

3.14 Das in einem Behälter gespeicherte Flüssigkeitsvolumen V ändert sich im Laufe der Zeit wie folgt:



Die Kurven über den Intervallen [0s, 20s] und [20s, 40s] seien Parabelstücke.

Bestimmen Sie die Volumenänderungsrate $\dot{V}$ zum Zeitpunkt t = 20s ...

a) ... geometrisch.

Vorgehen:
i) Zeichnen Sie im Diagramm die entsprechende Tangente ein.
ii) Schätzen Sie die Steigung der Tangente mit Hilfe eines Steigungsdreiecks ab.

b) ... analytisch.

Vorgehen:
i) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion $V: t \rightarrow V(t)$.
ii) Leiten Sie die Funktion V ab.

Lösungen

3.1 a) i) f': $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x^3 + ... + ka_k \cdot x^{k-1}$

ii) f'': $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f''(x) = 2a_2 + 6a_3 \cdot x + 12a_4 \cdot x^2 + 20a_5 \cdot x^3 + ... + k(k-1)a_k \cdot x^{k-2}$

b) f' ist eine Polynomfunktion (k-1)-ten Grades.
f'' ist eine Polynomfunktion (k-2)-ten Grades.
usw.

Bei jedem Ableiten reduziert sich der Grad der Polynomfunktion um 1.
Nach k-maligem Ableiten bleibt eine Polynomfunktion 0-ten Grades, also eine konstante Funktion.

3.2 a) $f''(-1) = -60$

b) $\ddot{s}(5) = g$

c) $S'''(2) = 48\alpha$

3.3 $P_1(2|0)$ $P_2\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{4}{9}\right)$

3.4 $P_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\middle|\dots\right)$ $P_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\middle|\dots\right)$

3.5 $a = \frac{5}{2}$

3.6 (weggelassen)

3.101 $a = -3$

3.102 a) $y = 3x + 6$

b) $(-2|0)$

c) $6 < b < 10$

3.103 $a = -4$ $b = 4$ $c = -1$

3.104 $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}$

3.7 a) $p = 6$

b) Relatives Maximum: $x_1 = 0$
Relative Minima: $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$
Wendepunkte: $x_4 = -1$, $x_5 = 1$

3.8 $A = 3600\ m^2$

3.9 Radius $r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,m$ Höhe $h = \frac{4}{\sqrt{3}}\,m$

3.12 l := Länge Laufstrecke = 400 m
Länge $a = \frac{l}{4} = 100$ m Breite $b = \frac{l - 2a}{\pi} \approx 63.7$ m

3.13 a := Länge Blech
b := Breite Blech
Quadratseite $x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \approx 3.5$ cm

3.105 Das erste Auto ist bereits 4/41 km über die Kreuzung gefahren.
Das zweite Auto befindet sich 5/41 km vor der Kreuzung.

3.106 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\,d$ $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,d$

3.14 a) i) ...

ii) $\dot{V}(20s) \approx 4\ l/s$

b) i)

$$V(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\ l/s^2\right) t^2 + 20\ l & (0s \le t \le 20s) \\ -\left(\frac{1}{10}\ l/s^2\right) t^2 + (8\ l/s)\ t - 60\ l & (20s \le t \le 40s) \\ 100\ l & (40s \le t \le 60s) \\ -(3\ l/s)\ t + 280\ l & (60s \le t \le 80s) \end{cases}$$

ii)

$$\dot{V}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\ l/s^2\right) t & (0s \le t \le 20s) \\ -\left(\frac{1}{5}\ l/s^2\right) t + 8\ l/s & (20s \le t \le 40s) \\ 0\ l/s & (40s \le t \le 60s) \\ -3\ l/s & (60s \le t \le 80s) \end{cases}$$

$\dot{V}(20s) = 4\ l/s$