Aufgaben 4 Integralrechnung für Polynomfunktionen
Unbestimmtes Integral, Bestimmtes Integral, Flächeninhalt

Lernziele

- Stammfunktionen bzw. das unbestimmte Integral einer Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten bestimmen können.
- die Faktor- und Summenregel anwenden können.
- Stammfunktionen bzw. das unbestimmte Integral einer Polynomfunktion bestimmen können.
- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen dem Grafen einer Polynomfunktion und der Abszisse mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- den Flächeninhalt einer Fläche zwischen den Grafen zweier Polynomfunktionen mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf des Stromes einer mengenartigen Grösse die in einer bestimmten Zeitspanne geflossene Menge mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.
- aus dem zeitlichen Verlauf der Änderungsrate einer mengenartigen Grösse die Änderung der Grösse in einer bestimmten Zeitspanne mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen können.

Aufgaben

4.1 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int x^3 \, dx$ b) $\int x^2 \, dx$ c) $\int x \, dx$

d) $\int 4 \, dx$ e) $\int (-7) \, dx$

4.2 Bestimmen Sie das unbestimmte Integral der folgenden Funktionen f:

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = 3x^2$ c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ f) $f(x) = x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x$

4.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen zweier Stammfunktionen F_1 und F_2 von f, so dass die genannten Bedingungen erfüllt sind:

a) $f(x) = 10x^2 + x$ $F_1(0) = 3$ $F_2(0) = -1$

b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ $F_1(2) = 5$ $F_2(4) = -8$

4.4 Gegeben sei die Funktionsgleichung der Ableitung f' einer Funktion f:

$$f'(x) = 3x^2 - 50x + 250$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, falls …

a) … $f(0) = 500$. b) … $f(10) = 2500$.

4.5 Gegeben sei die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f:

$$f''(x) = 2x - 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der …

a) … ersten Ableitung f', so dass $f'(2) = 4$ gilt.

b) … der Funktion f, so dass $f'(2) = 4$ und $f(1) = -1$ gilt.

4.6 Gegeben ist die Geschwindigkeitsfunktion v bei einer geradlinigen Bewegung:

$$v(t) = 3\ \frac{m}{s^2} \cdot t + 5\ \frac{m}{s}$$

Bestimmen Sie alle möglichen dazugehörigen Ortsfunktionen s.

4.7 Bei einer geradlinigen Bewegung kennt man die Beschleunigungsfunktion a sowie die Geschwindigkeit und den Ort zum Zeitpunkt t = 0s:

$$a(t) = 3\ \frac{m}{s^4}\ t^2 - 4\ \frac{m}{s^3}\ t + 1\ \frac{m}{s^2} \qquad v(0s) = -2\ \frac{m}{s} \qquad s(0s) = 3\ m$$

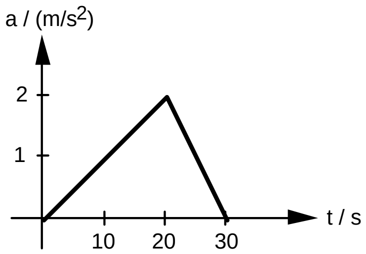
Bestimmen Sie die Ortsfunktion s.

4.8 Die Stärke des Volumenstromes in einem Rohr habe den folgenden zeitlichen Verlauf:

$$I_V(t) = a \cdot t^2 \qquad \text{mit } a = 0.003\ m^3/s^3$$

Bestimmen Sie das Flüssigkeitsvolumen V_a, welches zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 10$ s und $t_2 = 20$ s durch das Rohr geflossen ist.

4.9 Ein am Anfang ruhendes Fahrzeug wird während 30 Sekunden beschleunigt. Die folgende Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Beschleunigung a:

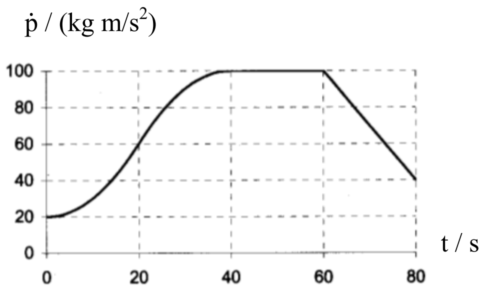


a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, welche das Fahrzeug nach den 30 Sekunden erreicht hat.

b) Fassen Sie die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t auf, also v: $t \rightarrow v = v(t)$.
Stellen Sie v sowohl analytisch (Funktionsgleichung) als auch grafisch (v-t-Diagramm) für die Zeitspanne $0s \leq t \leq 30s$ dar.

c) Bestimmen Sie die Strecke, die das Fahrzeug während den 30 Sekunden gefahren ist.

4.10 Ein schweres Motorrad der Masse 290 kg fährt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 36 km/h.
Die Änderungsrate des im Motorrad gespeicherten Impulses habe den folgenden zeitlichen Verlauf:



Die Kurven über den Intervallen [0s, 20s] und [20s, 40s] seien Parabelstücke 2. Ordnung.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Motorrades zum Zeitpunkt t = 80 s.

Hinweise:
- Der in einem Körper gespeicherte Impuls p ist das Produkt von Masse m und Geschwindigkeit v.
- Die Funktionsgleichung der Funktion $\dot{p}$: $t \rightarrow \dot{p}(t)$ entspricht der Funktionsgleichung der Funktion V: $t \rightarrow V(t)$ in der Aufgabe 3.14

Lösungen

4.1 a) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ b) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ c) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

d) $\int 4\,dx = 4x + C$ e) $\int (-7)\,dx = -7x + C$

4.2 a) $\int f(x)\,dx = \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

b) $\int f(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + C$

c) $\int f(x)\,dx = \int \left(x^3 + 2x^2 - 5\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 5x + C$

d) $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}\right) dx = \frac{x^6}{12} + \frac{2}{3x} + C$

e) $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5\right) dx = \frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 5x + C$

f) $\int f(x)\,dx = \int \left(x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x\right) dx = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{2} + C$

4.3 a) $F_1(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3$ $F_2(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$

b) $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x - 7$ $F_2(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x - 100$

4.4 a) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 500$ b) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1500$

4.5 a) $f'(x) = x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{17}{6}$

4.6 $s(t) = \frac{3}{2}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 5\,\frac{m}{s} \cdot t + C\,m$ $(C \in \mathbb{R})$

4.7 $s(t) = \frac{1}{4}\,\frac{m}{s^4}\,t^4 - \frac{2}{3}\,\frac{m}{s^3}\,t^3 + \frac{1}{2}\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - 2\,\frac{m}{s}\,t + 3\,m$

4.8 V_a = Fläche im I_V-t-Diagramm = $\int_{t_1}^{t_2} I_V(t)\,dt = \frac{a}{3}\left(t_2^3 - t_1^3\right) = 7\,m^3$

4.9 a) $v(30s) = v(0s) + \Delta v$

Δv = Fläche im a-t-Diagramm = $\int_{0s}^{30s} a(t)\,dt = 30$ m/s

$\Rightarrow$ $v(30s) = 0$ m/s + 30 m/s = 30 m/s

b) $v(t) = v(0s) + \Delta v$

Δv = Fläche im a-t-Diagramm (im Intervall [0s,t]) = $\int_{0s}^{t} a(\tau)\,d\tau$

$$a(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\,m/s^3\right) t & (0s \le t \le 20s) \\ \left(-\frac{1}{5}\,m/s^3\right) t + 6\,m/s^2 & (20s \le t \le 30s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ v(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{20}\,m/s^3\right) t^2 & (0s \le t \le 20s) \\ \left(-\frac{1}{10}\,m/s^3\right) t^2 + (6\,m/s^2)\,t - 60\,m/s & (20s \le t \le 30s) \end{cases}$$

4.10 $$\dot{p}(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{10}\ \mathrm{kg\ m/s^4}\right) t^2 + 20\ \mathrm{kg\ m/s^2} & (0\mathrm{s} \le t \le 20\mathrm{s}) \\ -\left(\frac{1}{10}\ \mathrm{kg\ m/s^4}\right) t^2 + (8\ \mathrm{kg\ m/s^3})\ t - 60\ \mathrm{kg\ m/s^2} & (20\mathrm{s} \le t \le 40\mathrm{s}) \\ 100\ \mathrm{kg\ m/s^2} & (40\mathrm{s} \le t \le 60\mathrm{s}) \\ -(3\ \mathrm{kg\ m/s^3})\ t + 280\ \mathrm{kg\ m/s^2} & (60\mathrm{s} \le t \le 80\mathrm{s}) \end{cases}$$

$v(80\mathrm{s}) = v(0\mathrm{s}) + \Delta v$

$\Delta p = m \cdot \Delta v$

$\Delta p =$ Fläche im $\dot{p}$-t-Diagramm $= \int_{0\mathrm{s}}^{80\mathrm{s}} \dot{p}(t)\, dt$

$\Rightarrow\ \Delta p = 5800\ \mathrm{kg\ m/s}$

$\Rightarrow\ v(80\mathrm{s}) = 30\ \mathrm{m/s} = 108\ \mathrm{km/h}$