Aufgaben 5 Funktion
Grundbegriffe, Zusammengesetzte Funktion, Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Umkehrfunktion

Lernziele

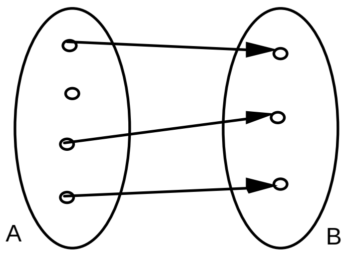
- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Zuordnung eine Funktion ist oder nicht.
- die Funktionsvorschrift einer Funktion korrekt formulieren können.
- eine Funktion in einem Pfeildiagramm, in einer Tabelle darstellen können.
- den Bildbereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- aus dem Grafen einer gegebenen Funktion den Definitionsbereich der Funktion herauslesen können.
- zwei gegebene Funktionen zu einer einzigen Funktion zusammensetzen können.
- eine gegebene Funktion als Zusammensetzung zweier oder mehrerer Funktionen darstellen können.
- beurteilen können, ob eine Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv ist oder nicht.
- die zu einer einfacheren bijektiven Funktion gehörige Umkehrfunktion bestimmen können.
- die Eigenschaften des Grafen einer bijektiven Funktion kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen dem Grafen einer bijektiven Funktion und dem Grafen der dazugehörigen Umkehrfunktion verstehen.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

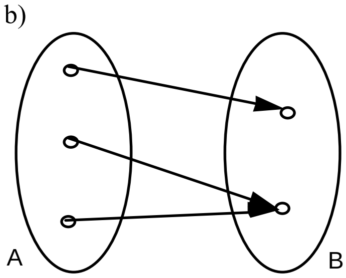
Grundbegriffe

5.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion $A \to B$ ist:

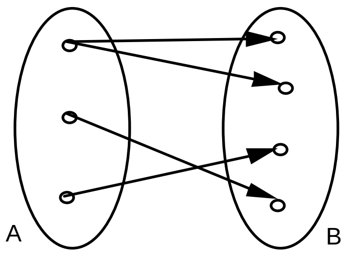
a)



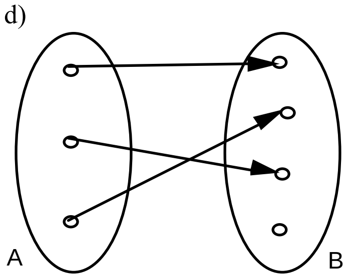
b)



c)



d)



e) A = Menge aller Häuser, B = Menge aller Architekten/-innen
f: $A \to B$, $h \to a = f(h)$ = Architekt/-in von h

f) A = Menge aller Vereine in der Schweiz, B = Menge aller Schweizer/-innen
p: $A \to B$, $x \to y = p(x)$ = Präsident/-in von x

g) A = {1983, 1984, ... , 1992, 1993}
B = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
f: $A \to B$, $j \to m = f(j)$ = Mensch mit Jahrgang j

h) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
B = {1983, 1984, ... , 1992, 1993}
j: $A \to B$, $m \to j = j(m)$ = Jahrgang von Mensch m

i) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = x^2$

j) f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$ = Zahl, welche quadriert gleich x ergibt

k) f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \to y = f(x)$ = Ganzzahliger Teiler von x

5.2 Gegeben sind die Mengen A und B.

Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktion $A \to B$.

i) Geben Sie die Funktionsvorschrift an.
ii) Stellen Sie die Funktion in einem Pfeildiagramm dar.
iii) Stellen Sie die Funktion in einer Tabelle dar.

a) A = Menge aller Tage des Jahres 2013
$B = \mathbb{N}$

b) A = Menge aller Schweizer Firmen
B = Menge aller Schweizer Kantone

c) A = Menge aller Vierecke
B = Menge aller Dreiecke

d) A = {-3, 1, 4, 7, 11, 14}
B = {-6, 2, 8, 14, 22, 28}

e) $A = \mathbb{R}^-$
$B = \mathbb{R}^+$

5.3 Bestimmen Sie den Bildbereich W der folgenden Funktionen:

a) A = {Januar, Februar, März, ..., Dezember}
B = {A, B, C, ..., Z}
f: $A \to B$, $m \to b = f(m)$ = Anfangsbuchstabe des Monats m

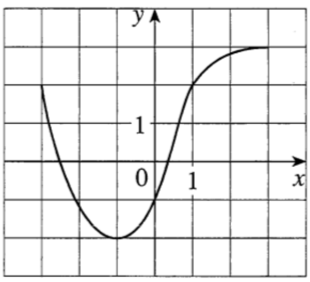
b) A = Menge aller Nachbarländer der Schweiz
B = Menge aller europäischen Städte
h: $A \to B$, $n \to s = h(n)$ = Hauptstadt des Nachbarlandes n

c) $A = \mathbb{R}$
$B = \mathbb{R}_0^+$
b: $A \to B$, $x \to y = b(x) = |x|$

d) Funktion f aus Aufgabe 5.1 h)

e) Funktion f aus Aufgabe 5.1 i)

5.4 Gegeben ist der vollständige Graf einer Funktion f:



a) Geben Sie den Funktionswert f(-1) an.

b) Schätzen Sie den Funktionswert f(2) ab.

c) Geben Sie die Werte von x an, für welche f(x) = 2 gilt.

d) Schätzen Sie die Werte von x ab, für welche f(x) = 0 gilt.

e) Geben Sie den Definitionsbereich D von f an.

f) Geben Sie den Bildbereich W von f an.

5.5 a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to f(x) = x^3 - x$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

i)	$f(1)$	ii)	$f(-2)$	iii)	$f(a)$
iv)	$f(b^2)$	v)	$f(a - b)$	vi)	$f(x^3 - x)$

b) $g\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \to g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

i)	$g(2)$	ii)	$g(-3)$	iii)	$g(a)$
iv)	$g(b^2)$	v)	$g(a - b)$	vi)	$g\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

Zusammengesetzte Funktion

5.6 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g.

Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion $h = g\circ f$

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = x^2$
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to z = g(y) = -2y$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \sin(x)$
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to z = g(y) = \frac{y}{y^2+1}$

c) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\},\ x \to y = f(x) = \frac{2}{x+1}$
$g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ y \to z = g(y) = \frac{2}{y} - 1$

d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
$g = f$

e) A = Menge aller Studierenden der HTW Chur
B = Menge aller Länder der Erde
C = $\mathbb{N}$ (= Menge aller natürlichen Zahlen)

$f\colon A \to B,\ s \to l = f(s)$ = Herkunftsland des Studierenden s
$g\colon B \to C,\ l \to e = g(l)$ = Einwohnerzahl des Landes *l*

5.7 Gegeben ist die Funktion h.

Bestimmen Sie zwei Funktionen f und g, aus welchen sich die Funktion h zusammensetzt, d.h. $h = g\circ f$.

a) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to z = h(x) = e^{-2x}$

b) $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \to z = h(x) = (x-1)\cdot\sin(2x)$

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to z = h(x) = x$

d) A = Menge aller Autobahntunnels im Kanton Graubünden
C = Menge aller Tage eines Jahres

$h\colon A \to C,\ t \to d = h(t)$ = Ostertag im Einweihungsjahr des Autobahntunnels t

5.8 Gegeben ist die folgende Funktion f:

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = 3\sin^2(4x - 3)$$

Um aus x den Funktionswert y = f(x) zu berechnen, werden nacheinander fünf einzelne Operationen ausgeführt. Daher kann man f auffassen als Funktion, die sich aus fünf Funktionen f_1 bis f_5 zusammensetzt, d.h. $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Bestimmen Sie die fünf Funktionen f_1 bis f_5.

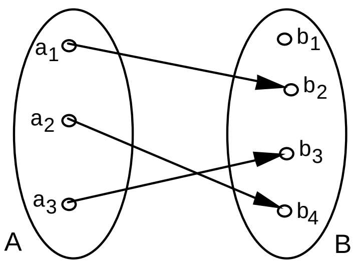
5.9 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Verknüpfung zweier Funktionen kommutativ ist, d.h. ob gilt: $g \circ f = f \circ g$

Hinweis:
- Betrachten Sie Beispiele aus den Aufgaben 5.6 und 5.7.

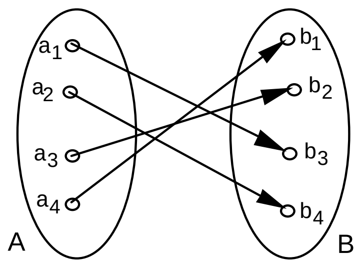
Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

5.10 Beurteilen Sie mit schlüssigen Begründungen die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität der folgenden Funktionen:

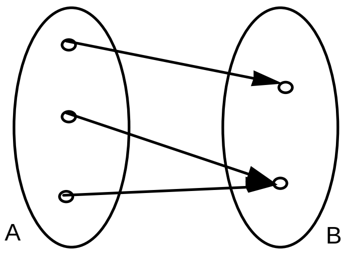
a)



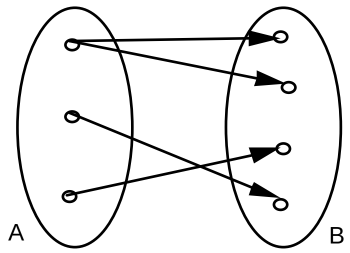
b)



c)



d)



e) $f:\ \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+,\ x \to y = f(x) = x^2$

f) $f:\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+,\ x \to y = f(x) = x^2$

g) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to y = f(x) = x^2$

h) A = {Vater, Mutter, Sohn, Tochter}, B = {1968, 1996, 1970, 1998}
f: A → B, x → y = f(x) = Jahrgang von x

i) Vater hat Jahrgang 1968, Mutter hat Jahrgang 1970,
Sohn hat Jahrgang 1996, Tochter hat Jahrgang 1998

ii) Vater hat Jahrgang 1968, Mutter hat Jahrgang 1970,
Sohn hat Jahrgang 1995, Tochter hat Jahrgang 1998

iii) Vater hat Jahrgang 1968, Mutter hat Jahrgang 1970,
Sohn und Tochter haben Jahrgang 1998

i) A = Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen, B = {1983, 1984, ... , 1992, 1993}
f: A → B, x → y = f(x) = Jahrgang von x

j) A = Menge aller Schweizer Vereine, B = Menge aller Menschen
f: A → B, x → y = f(x) = Präsident/-in von x

k) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = \sqrt{x}$

l) f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = \sqrt{x}$

m) f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \to z = f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{(n gerade)} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{(n ungerade)} \end{cases}$

5.11 Die Funktionen in den Aufgaben 5.10 h) iii), 5.10 i), 5.10 j) und 5.10 l) sind nicht bijektiv.

Machen Sie für diese beiden Funktionen je einen Vorschlag, wie man die Definitionsmenge A und/oder die Zielmenge B einschränken müsste, um bei gleichbleibender Funktionsvorschrift eine bijektive Funktion zu erhalten.

5.12 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

"Wenn eine Funktion f: $A \to B$ bijektiv ist, kann man folgern, dass die beiden Mengen A und B gleich viele Elemente enthalten."

Umkehrfunktion

5.13 Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} aller bijektiven Funktionen der Aufgabe 5.10.

5.14 Gegeben sei eine bijektive Funktion f: $A \to B$, $x \to y = f(x)$, wobei A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$ seien, d.h. $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Eigenschaft(en), die der Graf von f besitzt im Gegensatz zum Grafen einer Funktion, die nicht bijektiv ist.

b) Skizzieren Sie den Grafen der zu f gehörigen Umkehrfunktion f^{-1}: $B \to A$, $y \to x = f^{-1}(y)$.

5.15 Betrachten Sie die Funktion

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = mx + q$ ($m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$)

a) Bestimmen Sie, für welche Werte von m und q die Funktion f bijektiv ist.

b) Bestimmen Sie für den Fall, dass f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1}.

c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion von f ist, indem Sie nachprüfen, dass $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}$ gilt.

Lösungen

5.1 a) keine Funktion (Zuordnung nicht definiert für alle $a \in A$)

b) Funktion

c) keine Funktion (Zuordnung nicht eindeutig)

d) Funktion

e) keine Funktion (f nicht oder nicht eindeutig definiert für alle $h \in A$)

f) keine Funktion (p nicht definiert für alle $x \in A$)

g) keine Funktion (f nicht eindeutig)

h) Funktion

i) Funktion

j) keine Funktion (f nicht eindeutig)

k) keine Funktion (f nicht eindeutig)

5.2 a) i) $g\colon\ A \to B,\ d \to n = g(d)$ = Anzahl neugeborener Kinder in der Schweiz am Tag d
ii) ...
iii) ...

b) i) $s\colon\ A \to B,\ f \to k = s(f)$ = Kanton, in welchem die Firma f ihren Sitz hat
ii) ...
iii) ...

c) i) $f\colon\ A \to B,\ v \to d = f(v)$ = gleichseitiges Dreieck mit gleichem Flächeninhalt wie v
ii) ...
iii) ...

d) i) $d\colon\ A \to B,\ x \to y = d(x) = 2x$
ii) ...
iii) ...

e) i) $v\colon\ A \to B,\ x \to y = v(x) = -x$
ii) ...
iii) ...

5.3 a) $W = \{A, D, F, J, M, N, O, S\}$

b) W = {Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}

c) $W = B$

d) $W = B$

e) $W = \mathbb{R}_0^+$

5.4 a) $f(-1) = -2$

b) $f(2) \approx 2.8$

c) $x_1 = -3,\ x_2 = 1$

d) $x_1 \approx -2.5,\ x_2 \approx 0.3$

e) $D = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge -3 \le x \le 3\} = [-3,3]$

f) $W = \{y\colon y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le y \le 3\} = [-2,3]$

5.5 a) i) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$

ii) $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$

iii) $f(a) = a^3 - a$

iv) $f(b^2) = (b^2)^3 - b^2 = b^6 - b^2$

v) $f(a - b) = (a - b)^3 - (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$

vi) $f\left(x^3 - x\right) = \left(x^3 - x\right)^3 - \left(x^3 - x\right) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

b) i) $g(2) = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$

ii) $g\left(-3\right) = \frac{(-3)^2}{-3+1} = -\frac{9}{2}$

iii) $g(a) = \frac{a^2}{a+1}$

iv) $g\left(b^2\right) = \frac{\left(b^2\right)^2}{b^2+1} = \frac{b^4}{b^2+1}$

v) $g\left(a - b\right) = \frac{\left(a-b\right)^2}{\left(a-b\right)+1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b + 1}$

vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+1} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

5.6 a) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2x^2$

b) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x) + 1}$

c) h: $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$

d) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to z = h(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{1 + \left(x^2+1\right)^2}$

e) h: $A \to C$, $s \to e = h(s) = (g \circ f)(s) = g(f(s))$ = Einwohnerzahl des Herkunftslandes des Studierenden s

5.7 a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = -2x$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = e^y$

b) f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \to y = f(x) = x-1$
g: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = y \cdot \sin\left(2(y+1)\right)$

c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x) = 2x$
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \to z = g(y) = \frac{y}{2}$

d) B = Menge aller Jahre von 1900 bis heute

f: $A \to B$, $t \to j = f(t)$ = Einweihungsjahr des Autobahntunnels t
g: $B \to C$, $j \to d = g(j)$ = Ostertag im Jahr j

5.8 f_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_1(x) = 4x$
f_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_2(x) = x - 3$
f_3: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_3(x) = \sin(x)$
f_4: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_4(x) = x^2$
f_5: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = f_5(x) = 3x$

5.9 ...

5.10 a) f injektiv, f nicht surjektiv (Nicht jedes $b \in B$ ist Bildelement.) $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

b) f injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv

c) f nicht injektiv (Ein Element in B ist Bildelement von zwei Elementen in A.), f surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

d) f keine Funktion (Ein Element aus A hat zwei Bildelemente in B.)

e) f injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv

f) f nicht injektiv (Jedes $y \in \mathbb{R}^+$ ist Bildelement von zwei $x \in \mathbb{R}$.), f surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

g) f nicht injektiv (Jedes $y \in \mathbb{R}^+$ ist Bildelement von zwei $x \in \mathbb{R}$.),
f nicht surjektiv (Keines der Elemente $y \in \mathbb{R}^-$ ist Bildelement eines $x \in \mathbb{R}$.)
$\Rightarrow$ f nicht bijektiv

h) i) f injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv
ii) f keine Funktion ($1995 \notin B$)
iii) f nicht injektiv (1998 tritt zweimal als Bildelement auf.), f nicht surjektiv (1996 tritt nicht als Bildelement auf.) $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

i) f nicht injektiv (Die Elemente in B treten mehrfach als Bildelemente auf.), f surjektiv $\Rightarrow$ f nicht bijektiv

j) f nicht injektiv (Es gibt Menschen, die Präsident/-in von mehr als einem Schweizer Verein sind.),
f nicht surjektiv (Nicht jeder Mensch ist Präsident/-in eines Schweizer Vereins.)
$\Rightarrow$ f nicht bijektiv

k) f keine Funktion (Keines der Elemente $x \in \mathbb{R}^-$ hat ein Bildelement $y \in \mathbb{R}$.)

l) f injektiv, f nicht surjektiv (Keines der Elemente $y \in \mathbb{R}^-$ ist Bildelement eines $x \in \mathbb{R}^+$.)
$\Rightarrow$ f nicht bijektiv

m) f injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv

5.11 5.10 h) iii) A' = {Vater, Mutter, Tochter}
B' = {1968, 1970, 1998}

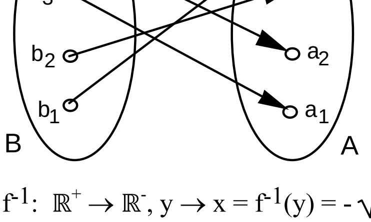
5.10 i) A' = Menge aus 11 Personen , von welchen je jemand den Jahrgang 1983 bzw. 1984 bzw. ... bzw. 1993 hat.
B' = B

5.10 j) A' = Menge aller Schweizer Vereine, deren Präsidenten/-innen genau einen Verein präsidieren.
B' = Menge aller Menschen, die Präsident/-in von genau einem Schweizer Verein sind

5.10 l) A' = A
B' = $\mathbb{R}^+$

5.12 …

5.13 5.10 b)



5.10 e) f^{-1}: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$, $y \to x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

5.10 h) i) A = {Vater, Mutter, Sohn, Tochter}, B = {1968, 1996, 1970, 1998}
f^{-1}: $B \to A$, $y \to x = f^{-1}(y)$ = Person, deren Jahrgang y ist

5.10 m) $f^{-1}: \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{N},\ z \to n = f^{-1}(z) = \begin{cases} 2z & (z > 0) \\ -2z-1 & (z < 0) \end{cases}$

5.14 a) ...

b) ...

5.15 a) f bijektiv, falls $m \neq 0$

b) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to x = f^{-1}(y) = \frac{y-q}{m}$

c) ...