Unbestimmtes Integral

Bsp.: Geradlinige Bewegung

Gegeben sei die Geschwindigkeitsfunktion $v = \dot{s}$:

$$v(t) = \dot{s}(t) = 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wie lautet die Ortsfunktion s?

$$s(t) = \dots ?$$

Allgemeines Problem

Gegeben sei eine Funktion f. Welche Funktion F ist so, dass gilt: $F' = f$?

Bsp.: $f(x) = 2x$

$\Rightarrow$

$F_1(x) = x^2$	da $F_1'(x) = 2x = f(x)$
$F_2(x) = x^2 + 1$	da $F_2'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x)$
$F_3(x) = x^2 - 4$	da $F_3'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x)$
…	
$F(x) = x^2 + C\ \ (C \in \mathbb{R})$	da $F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x)$

$f(x) = 8x^3$

$\Rightarrow$

$F_1(x) = 2x^4$	da $F_1'(x) = 8x^3 = f(x)$
$F_2(x) = 2x^4 + 5$	da $F_2'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x)$
$F_3(x) = 2x^4 - 11$	da $F_3'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x)$
…	
$F(x) = 2x^4 + C\ \ (C \in \mathbb{R})$	da $F'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x)$

Definitionen

Die Funktion F ist eine **Stammfunktion** von f, falls ihre Ableitung F' gleich f ist, d.h. $F'(x) = f(x)$.

Die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f ist das **unbestimmte Integral** von f, bezeichnet als $\int f(x)\,dx$.
$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$C\ (C \in \mathbb{R})$ ist die **Integrationskonstante**.

Bsp.: $f(x) = 8x^3$

Die Funktionen $F_1, F_2, F_3, \dots$ mit $F_1(x) = 2x^4$, $F_2(x) = 2x^4 + 5$, $F_3(x) = 2x^4 - 11$, … sind alles Stammfunktionen von f. Wir schreiben deshalb $\int f(x)\,dx = \int 8x^3\,dx = 2x^4 + C$

$f(x) = 12x^2$

$\int f(x)\,dx = \int 12x^2\,dx = 4x^3 + C$

$\int 2x\,dx = x^2 + C$