

## Übung 9                      **Fourier-Transformation** **Dirac'sche Delta-Funktion, Fourier-Transformierte einer period. Funkt.**

### Lernziele

- die Ausblendeigenschaft des Diracstosses verstehen.
- Integrale bestimmen können, in welchen die Dirac'sche Delta-Funktion als Faktor des Integranden auftritt.
- die Fourier-Transformierte einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion grafisch darstellen können.

### Aufgaben

#### Dirac'sche Delta-Funktion

1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) \cdot \delta(t) dt$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \sin(2t) \cdot \left(t - \frac{1}{4}\right) dt$

c)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$

d)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$

e)  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - a) dt$

f)  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(at - b) dt \quad (a \neq 0)$

2. Der Diracstoss  $\delta(t)$  ist der Grenzwert der Rechtecksfunktion  $\text{rect}(t)$  für  $\tau \rightarrow 0$  (vgl. Unterricht).

- Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Diracstosses  $\delta(t)$ .
- Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion  $\text{rect}(t)$ .
- Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion  $\text{rect}(t)$  für  $\tau \rightarrow 0$  gegen die Fourier-Transformierte des Diracstosses  $\delta(t)$  strebt.

*Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion*

3. \* Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte  $X(\omega)$  einer periodischen Funktion  $x(t)$  gegeben ist durch

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1)$$

mit:  $c_k$  = Fourier-Koeffizienten von  $x(t)$   
 $\omega_0$  = Grundfrequenz von  $x(t)$

Vorgehen:

$X(\omega)$  ist genau dann die Fourier-Transformierte von  $x(t)$ , wenn  $X(\omega)$  das Fourier-Integral erfüllt:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

Setzen Sie also den in (1) behaupteten Ausdruck für  $X(\omega)$  auf der rechten Seite von (2) ein, vereinfachen Sie die rechte Seite, und stellen Sie fest, dass sich  $x(t)$  ergibt.

Hinweise:

- Integration und Summation dürfen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden.
- Benützen Sie die Ausblendeigenschaft des Diracstosses.

4. Gegeben ist die periodische Funktion  $x(t)$ .

- i) Skizzieren Sie den Grafen von  $x(t)$  (ausser bei c)).
- ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) von  $x(t)$ .
- iii) Skizzieren Sie das Spektrum  $\{c_k\}$  grafisch als Balkendiagramm.
- iv) Geben Sie die zu  $x(t)$  gehörige Fourier-Transformierte  $X(\omega)$  an.
- v) Skizzieren Sie den Grafen von  $X(\omega)$ .

a)  $x(t) = \cos(at)$

b)  $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T_0}{4} \\ 0 & \frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$

Bemerkung:

Die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$  haben Sie bereits in der Übung 5 bestimmt.

c)  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (t-kT)$

d)  $x(t) = -3 + 2 \sin\left(\frac{2}{3}t\right) + 5 \cos\left(\frac{4}{3}t\right) - 4 \sin(t)$

**Lösungen**

1. a) 0  
 b) 2  
 c) 0  
 d)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$   
 e)  $x(t)$   
 f)  $\frac{1}{|a|} x\left(\frac{b}{a}\right)$

2. a)  $FT(x(t)) = 1$   
 b)  $FT(x(t)) = \frac{j}{1 - e^{-j\omega}} (e^{-j\omega} - 1)$  ( $\omega \neq 0$ )  
 c) ...  
 (Regel von Bernoulli-de l'Hôpital)

3. \* ...

4. a) i) ...  
 ii)  $c_0 = a$   
 $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}, c_k = 0 (k \neq \pm 1)$   
 iii) ...  
 iv)  $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\delta(\omega - k)) = (\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1))$   
 v) ...

- b) i) ...  

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$$
 ii) ...  
 iii) ...  
 iv)  $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\delta(\omega - k))$   

$$= \dots - \frac{2}{7} (\delta(\omega + 7)) + \frac{2}{5} (\delta(\omega + 5)) - \frac{2}{3} (\delta(\omega + 3)) + 2 (\delta(\omega + 1)) + (\delta(\omega))$$

$$+ 2 (\delta(\omega - 1)) - \frac{2}{3} (\delta(\omega - 3)) + \frac{2}{5} (\delta(\omega - 5)) - \frac{2}{7} (\delta(\omega - 7)) + \dots$$
 v) ...

c) i) ...

ii)  $c_k = \frac{1}{T}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$

iii) ...

iv) 
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega T} = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( e^{-jk\frac{2}{T}} \right)$$

$$= \dots + \frac{2}{T} \left( e^{+j\frac{6}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left( e^{+j\frac{4}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left( e^{+j\frac{2}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left( e^0 \right)$$

$$+ \frac{2}{T} \left( e^{-j\frac{2}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left( e^{-j\frac{4}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left( e^{-j\frac{6}{T}} \right) + \dots$$

v) ...

d) ii)  $\omega = \frac{2\pi}{3}$

$c_0 = -3, c_2 = -j, c_{-2} = j, c_3 = 2j, c_{-3} = -2j, c_4 = c_{-4} = \frac{5}{2}, c_k = 0$  ( $k = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ )

iii) ...

iv) 
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega T}$$

$$= 5 \left( e^{+j\frac{4}{3}} \right) - 4j \left( e^{+j\frac{2}{3}} \right) + 2j \left( e^{+j\frac{2}{3}} \right) - 6 \left( e^0 \right)$$

$$- 2j \left( e^{-j\frac{2}{3}} \right) + 4j \left( e^{-j\frac{2}{3}} \right) + 5 \left( e^{-j\frac{4}{3}} \right)$$

v) ...