

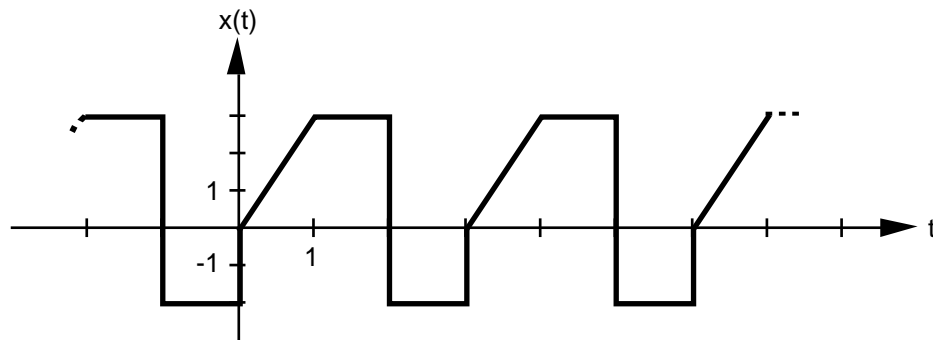
Aufgaben 7 Reelle Fourier-Reihe Konstanter Anteil, Spezielle Funktionen, Linearität, Skalierung

Lernziele

- aus dem Grafen einer einfacheren periodischen Funktion den konstanten Anteil der reellen Fourier-Reihe herauslesen können.
- angeben können, wie sich der konstante Anteil der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion ändert, wenn der Graf der Funktion vertikal verschoben wird.
- ohne Berechnung von Integralen Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion mit speziellen Symmetrieeigenschaften machen können.
- ohne Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion bestimmen können, die sich aus trigonometrischen Teilfunktionen zusammensetzt.
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion bestimmen können, die aus einer Linearkombination von Funktionen mit gleicher Grundperiode bestehen und deren reelle Fourier-Reihen bekannt sind.
- beurteilen können, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Aufgaben

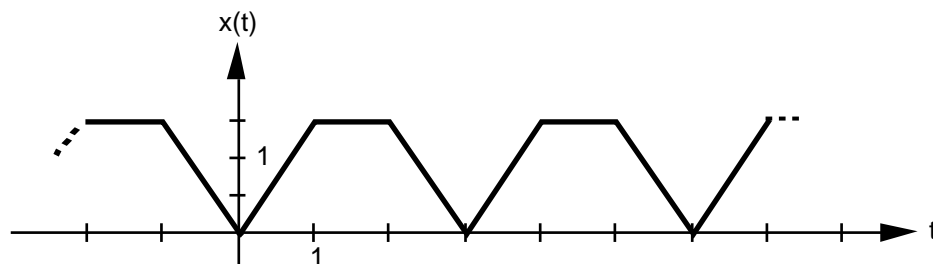
7.1 Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$:



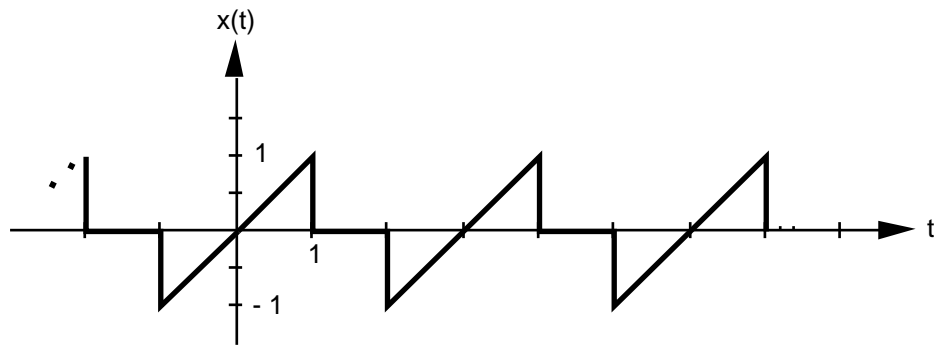
- Bestimmen Sie den reellen Fourier-Koeffizienten a_0 .
- Der Graf von $x(t)$ werde um 3 Einheiten vertikal nach oben verschoben. Wie gross ist der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion?
- Um wieviele Einheiten müsste man den Grafen von $x(t)$ vertikal verschieben, damit der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion gleich Null würde?

7.2 Beurteilen Sie mit Begründung, jedoch ohne Berechnung von Integralen, welche der reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) der periodischen Funktion $x(t)$ gleich Null sind:

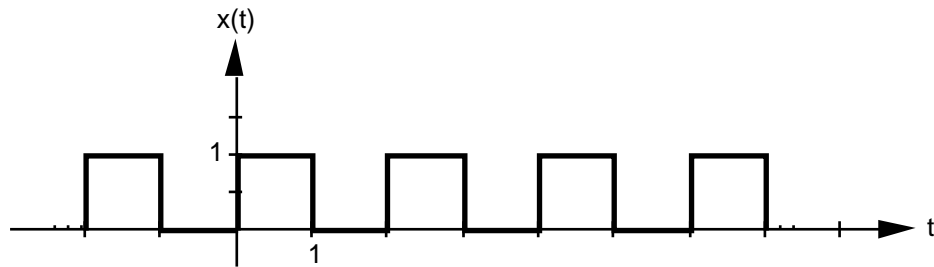
a)



b)



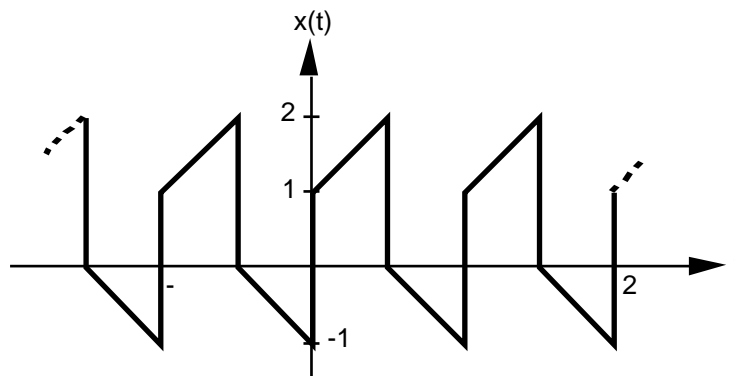
c)



7.3 Bestimmen Sie ohne Tabellen und Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) der Funktion $x(t)$:

- a) $x(t) = 2 + \cos(3t) - 4 \cos(6t) + 2 \sin(15t)$
- b) $x(t) = \sin(4t) + 3 \cos(10t) - 2 \sin(12t) + \sin(24t)$
- c) $x(t) = 2 \sin(4t-1) - 4 \cos(3t+2)$

7.4 Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion $x(t)$:

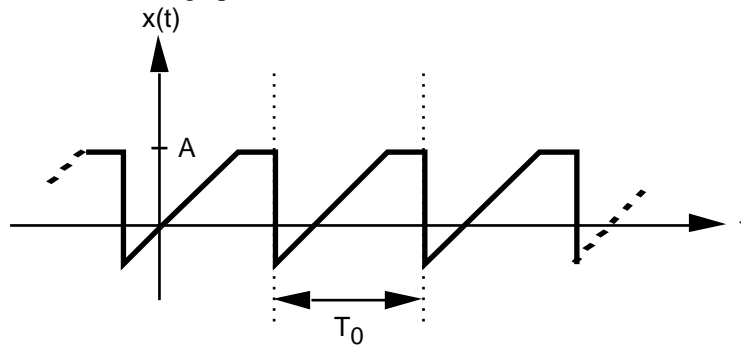


- a) Die Funktion $x(t)$ kann als Linearkombination zweier Teilfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ aufgefasst werden, deren reelle Fourier-Reihen in der Tabelle 2 des Lehrbuches Papula 2 (Seiten 173 und 174) aufgeführt sind.

Formulieren Sie diese Linearkombination, d.h. finden Sie heraus, aus welchen beiden Teilfunktionen $x(t)$ zusammengesetzt ist und mit welchen Faktoren die beiden Teilfunktionen gewichtet sind.

- b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $x(t)$ mit Hilfe der Linearität und den tabellierten reellen Fourier-Reihen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

7.5 Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion $x(t)$:



Die reellen Fourier-Koeffizienten $a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$ von $x(t)$ seien bekannt.

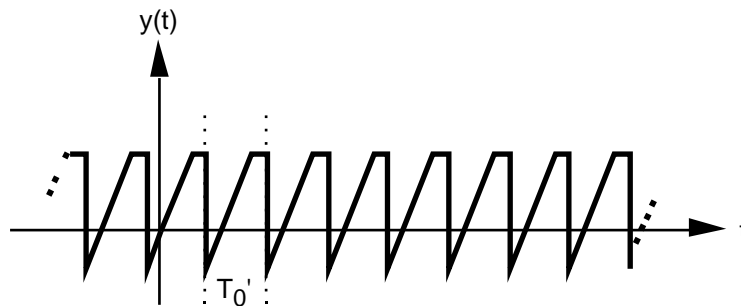
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die reellen Fourier-Koeffizienten $a_{0y}, a_{ky} (k \in \mathbb{N}), b_{ky} (k \in \mathbb{N})$ der Funktion $y(t)$ von den Koeffizienten $a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$ der Funktion $x(t)$ unterscheiden.

a)



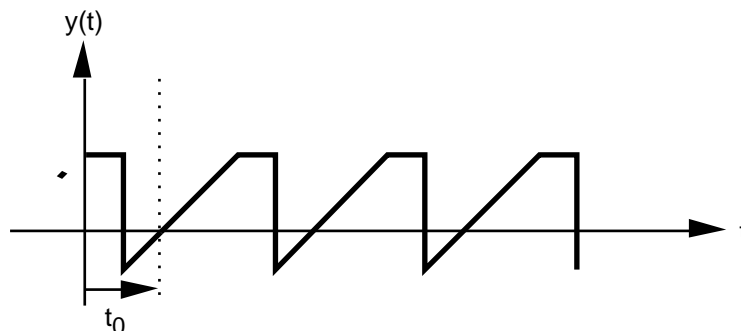
$y(t) := r \cdot x(t)$ mit $r > 0$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um den Faktor $r := A'/A$ skaliert, d.h. der Graf ist in y -Richtung "gestreckt" (falls $r > 1$) bzw. "gestaucht" (falls $r < 1$).

b)



$y(t) := x(r \cdot t)$ mit $r > 0$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um den Faktor $r = T_0/T_0'$ skaliert, d.h. der Graf ist in der Zeit-Achse "gestaucht" (falls $r > 1$) bzw. "gestreckt" (falls $r < 1$).

c) *



$y(t) := x(t - t_0)$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um t_0 verschoben.

Lösungen

7.1 a) $a_0 = \frac{5}{3}$ b) $a_0 = \frac{23}{3}$ c) $y = -\frac{5}{6}$

7.2 a) $b_k = 0$ (k N) b) $a_0 = 0, a_k = 0$ (k N) c) $a_k = 0$ (k N)

7.3 a) $a_0 = 3$ $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} (a_k \cdot \cos(k3t) + b_k \cdot \sin(k3t))$
 $a_0 = 4, a_1 = 1, a_2 = -4, b_5 = 2, \text{ alle anderen Koeffizienten} = 0$

b) $a_0 = 2$ $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} (a_k \cdot \cos(k2t) + b_k \cdot \sin(k2t))$
 $a_0 = 0, b_2 = 1, a_5 = 3, b_6 = -2, b_{12} = 1, \text{ alle anderen Koeffizienten} = 0$

c) $a_0 = 0, a_3 = -4 \cos(2), a_4 = -2 \sin(1), b_3 = 4 \sin(2), b_4 = 2 \cos(1),$
 $\text{alle anderen Koeffizienten} = 0$

7.4 a) $x(t) = 2 \cdot x_1(t) - x_2(t)$
wobei: $x_1(t)$: (1) Rechteckskurve mit $\hat{y} := 1$ und $T_0 :=$ (Papula 2, Seite 173)
 $x_2(t)$: (2) Dreieckskurve mit $\hat{y} := 1$ und $T_0 :=$ (Papula 2, Seite 173)

b) $x(t) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \left(\sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(6t) + \frac{1}{5} \sin(10t) + \dots \right)$
 $- \frac{1}{2} + \frac{4}{2} \left(\cos(2t) + \frac{1}{9} \cos(6t) + \frac{1}{25} \cos(10t) + \dots \right)$
 $= \frac{1}{2} - \frac{4}{2} \cos(2t) - \frac{4}{9} \cos(6t) - \frac{4}{25} \cos(10t) - \dots$
 $+ \frac{4}{3} \sin(2t) + \frac{4}{3} \sin(6t) + \frac{4}{5} \sin(10t) + \dots$

7.5 a) Alle Koeffizienten sind um den Faktor r vergrößert (falls $r > 1$) bzw. verkleinert (falls $r < 1$):
 $a_{0y} = r \cdot a_0, a_{ky} = r \cdot a_k$ (k N), $b_{ky} = r \cdot b_k$ (k N)

b) Die Koeffizienten bleiben unverändert:
 $a_{0y} = a_0, a_{ky} = a_k$ (k N), $b_{ky} = b_k$ (k N)

c) * $a_{0y} = a_0$

k-te Harmonische

$a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t)$

$a_k \cdot \cos(k \cdot \omega(t-t_0)) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega(t-t_0))$

$= a_k \left(\cos(k \cdot \omega t) \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) + \sin(k \cdot \omega t) \cdot \sin(k \cdot \omega t_0) \right)$
 $+ b_k \left(\sin(k \cdot \omega t) \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) - \cos(k \cdot \omega t) \cdot \sin(k \cdot \omega t_0) \right)$

= ...

$= \left(a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) - b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0) \right) \cos(k \cdot \omega t) + \left(a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) \right) \sin(k \cdot \omega t)$

Es folgt also:

$a_{ky} = a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0) - b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0)$

$b_{ky} = a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t_0) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t_0)$