

Aufgaben 12 **Fourier-Transformation** **Dirac'sche Delta-Funktion, Fourier-Transformierte einer period. Funkt.**

Lernziele

- die Ausblendeigenschaft des Diracstosses verstehen.
- Integrale bestimmen können, in welchen die Dirac'sche Delta-Funktion als Faktor des Integranden auftritt.
- die Fourier-Transformierte einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion grafisch darstellen können.

Aufgaben

Dirac'sche Delta-Funktion

12.1 Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) \cdot \delta(t) dt$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} 2 \cdot \sin(2t) \cdot \left(t - \frac{1}{4}\right) dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$

d) $\int_{-1}^{\infty} e^{-t} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) dt$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - a) dt$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(at - b) dt \quad (a \neq 0)$

12.2 Der Diracstoss $\delta(t)$ ist der Grenzwert der Rechtecksfunktion $\text{rect}(t)$ für $\tau \rightarrow 0$ (vgl. Unterricht).

- Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Diracstosses $\delta(t)$.
- Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\text{rect}(t)$.
- Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\text{rect}(t)$ für $\tau \rightarrow 0$ gegen die Fourier-Transformierte des Diracstosses $\delta(t)$ strebt.

Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion

12.3 * Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ einer periodischen Funktion $x(t)$ gegeben ist durch

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (1)$$

mit: c_k = Fourier-Koeffizienten von $x(t)$
 ω_0 = Grundfrequenz von $x(t)$

Vorgehen:

$X(\omega)$ ist genau dann die Fourier-Transformierte von $x(t)$, wenn $X(\omega)$ das Fourier-Integral erfüllt:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

Setzen Sie also den in (1) behaupteten Ausdruck für $X(\omega)$ auf der rechten Seite von (2) ein, vereinfachen Sie die rechte Seite, und stellen Sie fest, dass sich $x(t)$ ergibt.

Hinweise:

- Integration und Summation dürfen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden.
- Benützen Sie die Ausblendeigenschaft des Diracstosses.

12.4 Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$.

- i) Skizzieren Sie den Grafen von $x(t)$ (ausser bei d)).
- ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von $x(t)$.
- iii) Skizzieren Sie das Spektrum $\{c_k\}$ grafisch als Balkendiagramm.
- iv) Geben Sie die zu $x(t)$ gehörige Fourier-Transformierte $X(\omega)$ an.
- v) Skizzieren Sie den Grafen von $X(\omega)$.

a) $x(t) = \cos(at)$

b)
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T_0}{4} \\ 0 & \frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$$

Bemerkung:

Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k haben Sie bereits in der Aufgabe 8.1 bestimmt.

c)
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (t-kT)$$

d)
$$x(t) = -3 + 2 \sin\left(\frac{2}{3}t\right) + 5 \cos\left(\frac{4}{3}t\right) - 4 \sin(t)$$

Lösungen

- 12.1 a) 0
 b) 2
 c) 0
 d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
 e) $x(t)$
 f) $\frac{1}{|a|} x\left(\frac{b}{a}\right)$

- 12.2 a) $F\{x(t)\} = 1$
 b) $F\{x(t)\} = \frac{j}{1} (e^{j\omega} - 1) \quad (\omega = 0)$
 c) ...
 (Regel von Bernoulli-de l'Hôpital)

12.3 * ...

- 12.4 a) i) ...
 ii) $c_0 = a$
 $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}, c_k = 0 \quad (k \neq \pm 1)$
 iii) ...
 iv) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\delta(\omega - k)) = (\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1))$
 v) ...

- b) i) ...

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$$
 ii) ...
 iii) ...
 iv) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\delta(\omega - k))$

$$= \dots - \frac{2}{7} (\delta(\omega + 7)) + \frac{2}{5} (\delta(\omega + 5)) - \frac{2}{3} (\delta(\omega + 3)) + 2 (\delta(\omega + 1)) + (\delta(\omega))$$

$$+ 2 (\delta(\omega - 1)) - \frac{2}{3} (\delta(\omega - 3)) + \frac{2}{5} (\delta(\omega - 5)) - \frac{2}{7} (\delta(\omega - 7)) + \dots$$
 v) ...

c) i) ...

ii) $c_k = \frac{1}{T}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

iii) ...

iv)
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega T} = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{-jk\frac{2}{T}} \right)$$

$$= \dots + \frac{2}{T} \left(e^{+j\frac{6}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left(e^{+j\frac{4}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left(e^{+j\frac{2}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left(e^0 \right)$$

$$+ \frac{2}{T} \left(e^{-j\frac{2}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left(e^{-j\frac{4}{T}} \right) + \frac{2}{T} \left(e^{-j\frac{6}{T}} \right) + \dots$$

v) ...

d) ii) $\omega = \frac{2\pi}{3}$

$c_0 = -3, c_2 = -j, c_{-2} = j, c_3 = 2j, c_{-3} = -2j, c_4 = c_{-4} = \frac{5}{2}, c_k = 0$ ($k = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 4$)

iii) ...

iv)
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-jk\omega T}$$

$$= 5 \left(e^{+j\frac{4}{3}} \right) - 4j \left(e^{+j\frac{2}{3}} \right) + 2j \left(e^{+j\frac{2}{3}} \right) - 6 \left(e^0 \right)$$

$$- 2j \left(e^{-j\frac{2}{3}} \right) + 4j \left(e^{-j\frac{2}{3}} \right) + 5 \left(e^{-j\frac{4}{3}} \right)$$

v) ...