

Repetitions-Aufgaben 1 Fourier-Reihen

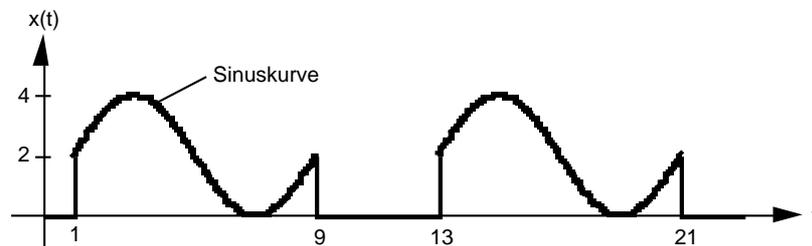
Aufgaben

R1.1 Gegeben ist die folgende periodische Funktion $x(t)$:

$$x(t) = 2 \sin(3t) + 4 \cos(15t)$$

- Bestimmen Sie alle reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).
- Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$).

R1.2 Gegeben ist ein Ausschnitt des Grafen einer periodischen Funktion $x(t)$:



Die Funktion $x(t)$ kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \sin(k \omega_0 t)) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}, T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

- Bestimmen Sie den Fourier-Koeffizienten a_0 .
- Stellen Sie die für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_k und b_k benötigten Integrale auf. Sie sollen die Integrale nur so weit aufbereiten, dass sie jemand berechnen kann, der nichts von Fourier-Reihen versteht und die Funktion $x(t)$ nicht kennt.

R1.3 Jede periodische Funktion $x(t)$ kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \sin(k \omega_0 t)) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}, T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

Beurteilen Sie, ob die folgende Behauptung wahr oder falsch ist:

"Wenn alle Koeffizienten a_k ($k \in \mathbb{N}$) gleich Null sind, dann kann man folgern, dass $x(t)$ ungerade ist."

R1.4 Das Signal $x(t)$ enthält eine Sinus-Schwingung der Frequenz a und eine Cosinus-Schwingung der Frequenz b :

$$x(t) = 2 \sin\left(at - \frac{\pi}{2}\right) + 6 \cos\left(bt + \frac{3\pi}{2}\right)$$

- Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) für $a = 6$ und $b = 8$.
- Beurteilen Sie, ob es noch weitere Werte für a und b gibt, für welche die komplexen Fourier-Koeffizienten des Signals $x(t)$ gleich sind wie im Fall $a = 6$ und $b = 8$. Geben Sie gegebenenfalls alle möglichen Werte für a und b an.

R1.5 Gegeben ist die folgende periodische Funktion $x(t)$:

$$x(t) = 2 + \sin(9t) - 3 \cos(6t)$$

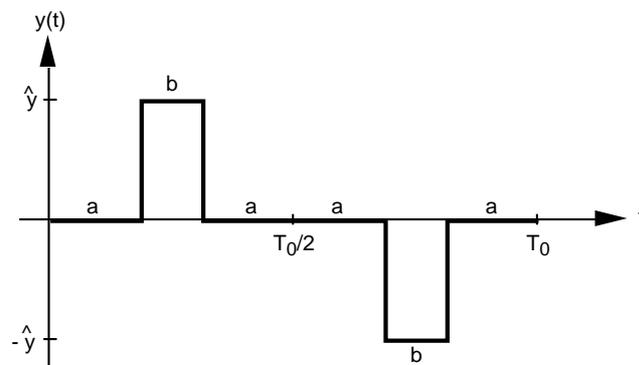
Die Funktion kann sowohl in eine reelle als auch in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \sin(k \omega_0 t))$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \omega_0 t}$$

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k , b_k und c_k der Funktion $x(t)$.

R1.6 In einer Fourier-Reihen-Tabelle ist die folgende periodische Funktion $y(t)$ und deren reelle Fourier-Reihe $FR(y(t))$ aufgeführt:



$$FR(y(t)) = \frac{4\hat{y}}{1} \frac{\cos(\omega_0 a)}{1} \sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3 \omega_0 a)}{3} \sin(3 \omega_0 t) + \frac{\cos(5 \omega_0 a)}{5} \sin(5 \omega_0 t) + \dots$$

wobei: $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$
 $T_0 = \text{Grundperiode}$

Prüfen Sie die Fourier-Reihe nach, indem Sie die Fourier-Koeffizienten b_k (= Koeffizienten der Sinus-Glieder) von Hand, d.h. ohne Taschenrechner, berechnen.

Auftretende Integrale müssen nicht auf Grundintegrale zurückgeführt werden, sondern Sie können dazu Integraltafeln verwenden.

Lösungen

R1.1 a) $a_0 = 0$
 $a_5 = 4, a_k = 0 \text{ (k } \neq 5)$
 $b_1 = 2, b_k = 0 \text{ (k } \neq 1)$

b) $c_1 = -j$
 $c_{-1} = j$
 $c_5 = c_{-5} = 2$
 $c_k = 0 \text{ (k } \neq \pm 1, \pm 5)$

R1.2 a) $a_0 = \frac{1}{6} \int_1^9 2 + 2 \sin\left(\frac{t}{4} - \frac{t}{4}\right) dt = \frac{8}{3}$

b) $a_k = \frac{1}{6} \int_1^9 2 + 2 \sin\left(\frac{t}{4} - \frac{t}{4}\right) \cos\left(k \frac{t}{6}\right) dt$

$b_k = \frac{1}{6} \int_1^9 2 + 2 \sin\left(\frac{t}{4} - \frac{t}{4}\right) \sin\left(k \frac{t}{6}\right) dt$

R1.3 falsch
 $x(t)$ ist nur dann ungerade, wenn auch a_0 gleich Null ist.

R1.4 a) $c_3 = c_{-3} = -1$
 $c_4 = -3j$
 $c_{-4} = 3j$
 $c_k = 0 \text{ (k } \neq \pm 3, \pm 4)$

b) $b = \frac{4}{3} a$

R1.5 $a_0 = 2$ $a_2 = -3$ $a_k = 0 \text{ (k } \neq 2)$
 $b_3 = 1$ $b_k = 0 \text{ (k } \neq 3)$

$c_0 = 2$ $c_2 = -\frac{3}{2}$ $c_k = 0 \text{ (k } \neq \pm 2, \pm 3)$
 $c_{-2} = -\frac{3}{2}$
 $c_3 = -\frac{j}{2}$
 $c_{-3} = \frac{j}{2}$

R1.6 $b_k = \frac{4\hat{V}}{k} \cos(k \cdot 0a)$ (k gerade)
 $b_k = \frac{4\hat{V}}{k} \cos(k \cdot 0a)$ (k ungerade)