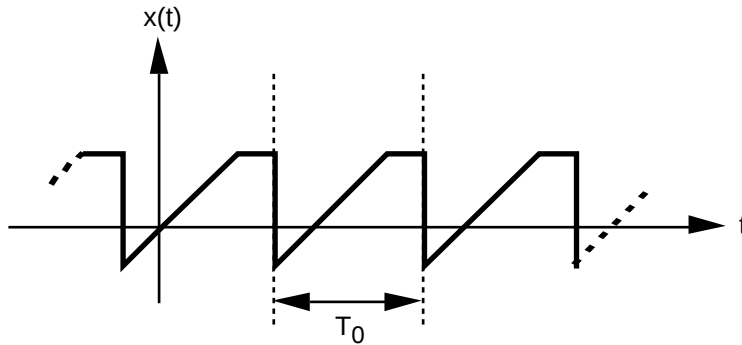


Reelle Fourier-Reihe

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode T_0



Die trigonometrische Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **reelle Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Die Konstanten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) sind die **reellen Fourier-Koeffizienten**.

Die Fourier-Reihen-Darstellung erlaubt es, $x(t)$ in einen konstanten Anteil, in eine Grundschwingung und in Oberschwingungen aufzuteilen:

$x(t) =$	$\frac{a_0}{2}$	Konstanter Anteil
+	$a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	1. Harmonische, Grundschwingung
+	$a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t)$	2. Harmonische, 1. Oberschwingung
+	$a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t)$	3. Harmonische, 2. Oberschwingung
+	...	
+	$a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$	n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung
+	...	

Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

$$a_0 \quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \quad \Big| \int_0^{T_0} \dots dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \right) dt$$

$$= \dots = \frac{a_0}{2} \cdot T_0 \quad \Big| : \frac{T_0}{2}$$

$$\text{fi} \quad a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

$$a_k(k \in \mathbb{N}) \quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \quad \left| \cdot \cos(m\omega_0 t), m \in \mathbb{N} \right.$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \right) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt$$

$$= \dots = a_m \cdot \frac{T_0}{2} \quad \left| : \frac{T_0}{2} \right.$$

$$\text{fi} \quad a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$b_k(k \in \mathbb{N}) \quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \quad \left| \cdot \sin(m\omega_0 t), m \in \mathbb{N} \right.$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \right) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt$$

$$= \dots = b_m \cdot \frac{T_0}{2} \quad \left| : \frac{T_0}{2} \right.$$

$$\text{fi} \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt$$

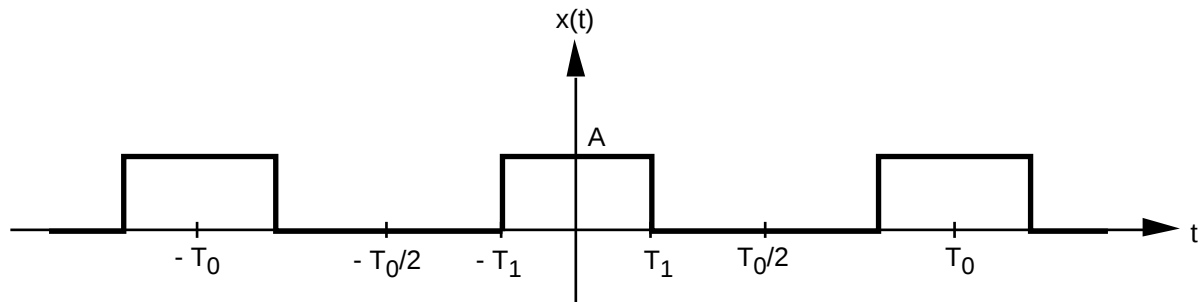
Da die Integranden in den Integralen für a_0 , $a_k(k \in \mathbb{N})$, $b_k(k \in \mathbb{N})$ die Periode T_0 besitzen, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt \end{aligned}}$$

Beispiel

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$x(t+T_0) = x(t)$$



$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt = \dots = \frac{4AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt = \dots = \frac{2A \cdot \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}$$

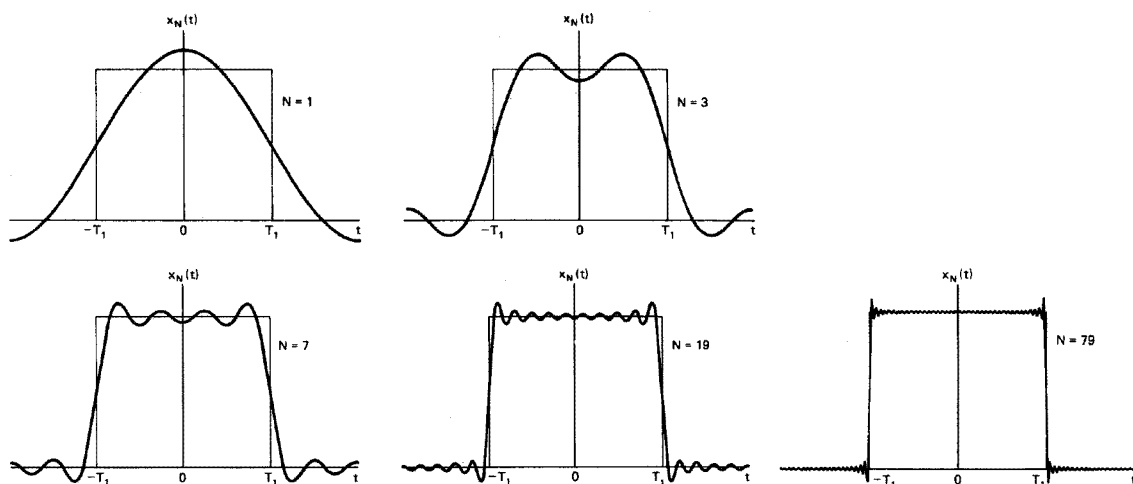
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt = \dots = 0$$

$$x(t) = \frac{2AT_1}{T_0} + \frac{2A \cdot \sin(\omega_0 T_1)}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(2\omega_0 T_1)}{2\omega_0} \cos(2\omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(3\omega_0 T_1)}{3\omega_0} \cos(3\omega_0 t) + \dots$$

Endliche Fourier-Reihe als Näherungsfunktion

$$x_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t))$$

$x(t)$ wie im obigen Beispiel



Betrags-/Phasen-Darstellung

Die reelle Fourier-Reihe kann sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung geschrieben werden:

Sinus-/Cosinus-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)) \quad (a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

Betrags-/Phasen-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + j_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, A_k \geq 0, 0 \leq j_k < 2\pi \text{ oder } -\pi < j_k \leq \pi)$$

oder

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k\omega_0 t + f_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, B_k \geq 0, 0 \leq f_k < 2\pi \text{ oder } -\pi < f_k \leq \pi)$$

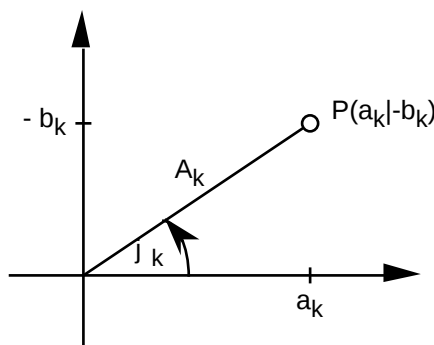
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten A_k und j_k können a_k und $-b_k$ als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) = A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + j_k)$$

...

$$a_k = A_k \cdot \cos(j_k)$$

$$b_k = -A_k \cdot \sin(j_k)$$



$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	
$j_k = \arctan \frac{-b_k}{a_k}$	$(a_k > 0)$
$j_k = \frac{\pi}{2}$	$(a_k = 0 \wedge b_k > 0)$
$j_k = -\frac{\pi}{2}$	$(a_k = 0 \wedge b_k < 0)$
$j_k = \arctan \frac{-b_k}{a_k} + \pi$	$(a_k < 0)$

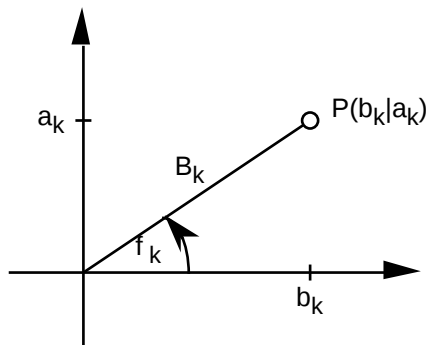
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten B_k und f_k können b_k und a_k als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) = B_k \cdot \sin(k\omega_0 t + f_k)$$

...

$$a_k = B_k \cdot \sin(f_k)$$

$$b_k = B_k \cdot \cos(f_k)$$



$$B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$f_k = \begin{cases} \arctan \frac{a_k}{b_k} & (b_k > 0) \\ \arctan \frac{a_k}{b_k} + \pi & (b_k = 0 \wedge a_k > 0) \\ \arctan \frac{a_k}{b_k} - \pi & (b_k = 0 \wedge a_k < 0) \\ \arctan \frac{a_k}{b_k} & (b_k < 0) \end{cases}$$