

Parseval'sche Beziehung

$x(t)$ periodisch mit Grundperiode T_0 bzw. Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

Komplexe Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Parseval'sche Beziehung

$$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis:

$$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot (x(t))^* dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} c_k^* \int_{(T_0)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} c_k^* \int_{(T_0)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$	=	"Signal", Elektrische Ladungsstromstärke I_Q , Elektrische Spannung U
	$ x(t) ^2$		Leistung zum Zeitpunkt t , wenn das Signal ein Widerstandselement durchläuft $\left(P_{el} = U \cdot I_Q = R \cdot I_Q^2 = \frac{1}{R} U^2 \right)$
	$ x(t) ^2 dt$		Umgesetzte Energie im Zeitintervall $[t, t+dt]$
	$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) ^2 dt$		Mittlere Leistung
	= $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ^2$		
	$ c_k ^2$		Mittlere Leistung bezüglich der k -ten Fourier- Komponente des Signals