

Parseval'sche Beziehung

$x(t)$ aperiodisch

Fourier-Integral

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Fourier-Transformierte

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Parseval'sche Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot (x(t))^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot e^{-j\omega t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot X(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$	=	"Signal", Elektrische Ladungsstromstärke I_Q , Elektrische Spannung U
	$ x(t) ^2$	~	Leistung zum Zeitpunkt t , wenn das Signal ein Widerstandselement durchläuft $\left(P_{el} = U \cdot I_Q = R \cdot I_Q^2 = \frac{1}{R} U^2 \right)$
	$ x(t) ^2 dt$	~	Umgesetzte Energie im Zeitintervall $[t, t+dt]$
	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	~	Gesamte umgesetzte Energie
	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) ^2 dw$		
	$ X(w) ^2 dw$	~	Umgesetzte Energie bezüglich des Frequenzintervalls $[w, w+dw]$
	$ X(w) ^2$	~	Dichte der umgesetzten Energie bezüglich der Frequenz w

$|X(w)|^2$ wird als **Energiedichtespektrum** bezeichnet.

