

# Klausur Mathematik 3 / TE / 22.3.2006

Name: .....

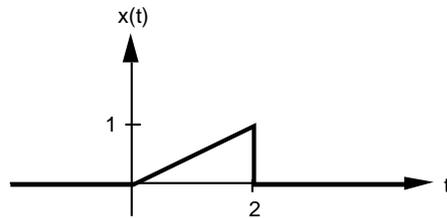
Punkte: ..... Note: .....

**Dauer:** 90 Minuten

**Hilfsmittel:** - Taschenrechner  
- beliebige schriftliche Unterlagen

**Bemerkungen:** - Bei jeder Aufgabe muss der ganze Lösungsweg klar ersichtlich sein.  
- Es wird auf eine übersichtliche Darstellung Wert gelegt.

1. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte  $X(\omega)$  der Funktion  $x(t)$  von Hand, d.h. direkt aus dem Definitionintegral der Fourier-Transformation und ohne weiteren Hilfsmittel (Fourier-Transformations-Tabelle, Taschenrechner):



Hinweis (Integrale):

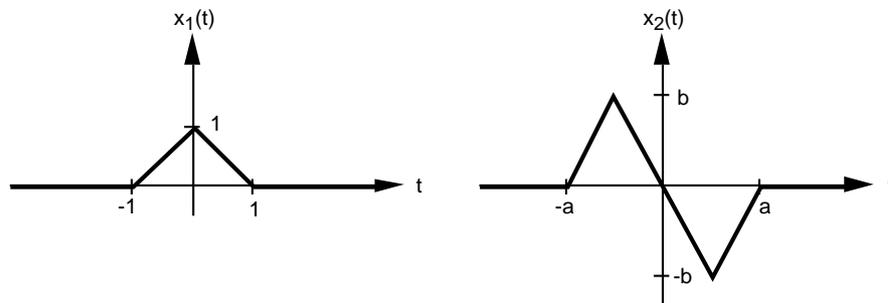
$$e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$x \cdot e^{ax} dx = \left( \frac{ax-1}{a^2} \right) e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 \cdot e^{ax} dx = \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

5 Punkte .....

2. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  ( $a > 0, b > 0$ ):



Die Fourier-Transformierte  $X_1(\omega)$  von  $x_1(t)$  sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte  $X_2(\omega)$  von  $x_2(t)$  durch die Fourier-Transformierte  $X_1(\omega)$  aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen  $X_2(\omega)$  und  $X_1(\omega)$  in Form einer Formel  $X_2(\omega) = \dots$  an, mit welcher man  $X_2(\omega)$  aus  $X_1(\omega)$  bestimmen könnte.

5 Punkte .....

3. Gegeben ist die Laplace-Transformierte  $X(s)$  einer Funktion  $x(t)$  ( $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > b$ ):

$$X(s) = \frac{s^2}{(s-a)(s-b)} \quad \operatorname{Re}(s) > a$$

Bestimmen Sie die Funktion bzw. die Laplace-Rücktransformierte  $x(t)$  mit einer beliebigen Methode.

Vorgabe:

Als Laplace-Transformations-Tabelle ist nur diejenige aus dem Lehrbuch Papula erlaubt (siehe Seite 4), d.h. keine weiteren Transformations-Tabellen aus anderen Quellen.

**5 Punkte** .....

4. Entscheiden Sie ohne Begründung, welche der jeweils drei Aussagen wahr ist. Bei allen Teilaufgaben a) bis e) ist immer **genau eine** Aussage wahr.

Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

*Bewertung:*

*Jede Teilaufgabe gibt 1 Punkt, wenn das richtige Kästchen angekreuzt ist. Wenn in einer Teilaufgabe kein Kästchen, ein falsches oder mehr als ein Kästchen angekreuzt ist bzw. sind, gibt es für die entsprechende Teilaufgabe 0 Punkte.*

- a) Die Fourier-Transformation ist eine Abbildung ...

... einer Zahlenmenge auf eine Zahlenmenge.

... einer Funktionenmenge auf eine Funktionenmenge.

... einer Zahlenmenge auf eine Funktionenmenge.

- b) Die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion ist ...

... immer periodisch.

... genau dann periodisch, wenn alle Fourier-Koeffizienten der Funktion gleich sind.

... immer aperiodisch.

- c) Eine Zeitverschiebung einer Funktion wirkt sich ...

... sowohl auf den Betrag als auch auf das Argument der Fourier-Transformierten aus.

... nur auf den Betrag der Fourier-Transformierten aus. Das Argument bleibt unverändert.

... nur auf das Argument der Fourier-Transformierten aus. Der Betrag bleibt unverändert.

(Fortsetzung auf der Seite 3)

d) Die Laplace-Transformierte einer Funktion ist eine Abbildung ...

... einer Zahlenmenge auf eine Zahlenmenge.

... einer Funktionenmenge auf eine Funktionenmenge.

... einer Zahlenmenge auf eine Funktionenmenge.

e) Der Konvergenzbereich einer Laplace-Transformierten  $X(s)$  gibt an, ...

... für welche  $s$  die Laplace-Transformierte existiert.

... für welche  $\sigma = \text{Im}(s)$  die Fourier-Transformierte existiert.

... wieviele Pole die Laplace-Transformierte enthält.

**5 Punkte** .....

Quelle: Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2001, 10. Auflage, ISBN 3-528-94237-1, Seiten 666 bis 669

4.2 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen

Die nachfolgende Tabelle enthält einige in den Anwendungen besonders häufig auftretende Funktionenpaare. Eine umfassendere Transformationstabelle findet der Leser in der Formelsammlung sowie in der einschlägigen Spezialliteratur (s. Literaturverzeichnis).

Tabelle: Spezielle Laplace-Transformationen

Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(1) $\frac{1}{s}$	1 (Sprungfunktion)
(2) $\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
(3) $\frac{1}{s^2}$	$t$
(4) $\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$
(5) $\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cdot e^{at}$
(6) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
(7) $\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at}$
(8) $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{a \cdot e^{at} - b \cdot e^{bt}}{a-b}$
(9) $\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
(10) $\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{e^{at}-at-1}{a^2}$
(11) $\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{(at-1) \cdot e^{at} + 1}{a^2}$

Tabelle (Fortsetzung)

(25) $\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{bt} \cdot \sinh(at)}{a}$
(26) $\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cdot \cosh(at)$
(27) $\frac{1}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\frac{\sin^2(at)}{2a^2}$
(28) $\frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$	$\cos^2(at)$
(29) $\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cdot \frac{\sin(at)}{2a}$
(30) $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cdot \cos(at)$
(31) $\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cdot \frac{\sinh(at)}{2a}$
(32) $\frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$t \cdot \cosh(at)$
(33) $\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\sin(at)}{t}$

5 Anwendungen der Laplace-Transformation

5.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

5.1.1 Allgemeines Lösungsverfahren mit Hilfe der Laplace-Transformation

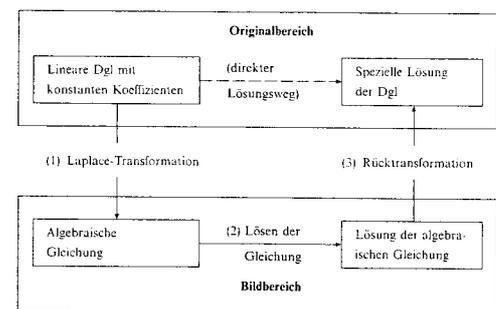
Mit den in den Anwendungen besonders wichtigen linearen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten haben wir uns bereits in Kapitel V ausführlich beschäftigt. Dort wurde gezeigt, wie man eine solche Differentialgleichung durch „Variation der Konstanten“ oder durch „Aufsuchen einer partikulären Lösung“ lösen kann.

Tabelle (Fortsetzung)

(12) $\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{at}$
(13) $\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} at^2 + t\right) \cdot e^{at}$
(14) $\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} a^2 t^2 + 2at + 1\right) \cdot e^{at}$
(15) $\frac{1}{s^n}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
(16) $\frac{1}{(s-a)^n}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )	$\frac{t^{n-1} \cdot e^{at}}{(n-1)!}$
(17) $\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin(at)}{a}$
(18) $\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
(19) $\frac{(\sin b) \cdot s + a \cdot \cos b}{s^2 + a^2}$	$\sin(at + b)$
(20) $\frac{(\cos b) \cdot s - a \cdot \sin b}{s^2 + a^2}$	$\cos(at + b)$
(21) $\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \cdot \sin(at)}{a}$
(22) $\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cdot \cos(at)$
(23) $\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh(at)}{a}$
(24) $\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$

Die allgemeine Lösung enthält dabei noch einen bzw. zwei Integrationskonstanten als Parameter.

Ein weiteres (insbesondere in der Elektrotechnik und Regelungstechnik weit verbreitetes) Lösungsverfahren liefert die Laplace-Transformation. Wie wir im einzelnen noch sehen werden, gehen dabei in die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen die jeweiligen Anfangswerte für  $t = 0$  als Parameter ein. Die Integration einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation liefert somit die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von den Anfangswerten<sup>91</sup>. Dieser in drei Schritten ablaufende Lösungsweg läßt sich wie folgt schematisch darstellen:



Wir beschreiben noch kurz die einzelnen Rechenschritte:

- (1) Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und vorgegebenen Anfangswerten wird zunächst mit Hilfe der Laplace-Transformation in eine algebraische Gleichung 1. Grades, d. h. in eine lineare Gleichung übergeführt.
- (2) Als Lösung dieser Gleichung erhält man die Bildfunktion  $Y(s)$  der gesuchten Lösung (Originalfunktion)  $y(t)$ .
- (3) Durch Rücktransformation gewinnt man aus der Bildfunktion  $Y(s)$  mit Hilfe einer Transformationsstabelle (s. Abschnitt 4.2) und oder spezieller Methoden (wie z. B. der Partialbruchzerlegung) die gesuchte Lösung  $y(t)$  der gestellten Anfangswertaufgabe.

<sup>91</sup> Wir lösen somit ein Anfangswertproblem.