

Klausur Mathematik 3 / TE / 24.10.2007

Name:

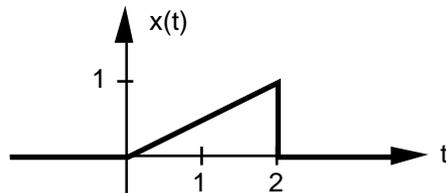
Punkte: Note:

Dauer: 45 Minuten

Hilfsmittel: - beliebige schriftliche Unterlagen
- Taschenrechner

Bemerkungen: - Bei jeder Aufgabe muss der Lösungsweg übersichtlich, vollständig und verständlich dokumentiert werden.
- Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu bearbeiten.

1. Gegeben ist der Graf einer Funktion $x(t)$:



Bestimmen die Laplace-Transformierte $X(s)$ von $x(t)$. Geben Sie auch den Konvergenzbereich K von $X(s)$ mit schlüssiger Begründung an.

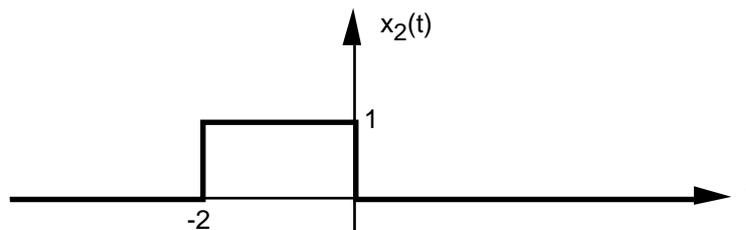
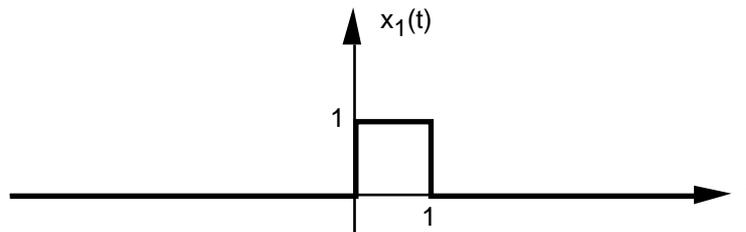
Gehen Sie dabei von der Definitionsgleichung der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das Integral von Hand, d.h. ohne Laplace-Transformations-Tabelle und ohne Taschenrechner.

Hinweis (kleine Integraltabelle für jeweils $a > 0$):

$$e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad x \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{ax-1}{a^2} \right) e^{ax} + C \quad x^2 \cdot e^{ax} dx = \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax} + C$$

5 Punkte

2. Gegeben sind die Grafen der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:



Bestimmen Sie ohne Taschenrechner den Grafen der Funktion $y(t) := x_1(t) * x_2(t)$

5 Punkte

3. Gegeben ist ein Ausschnitt aus einer Laplace-Transformations-Tabelle (Papula 2, Seite 666):

Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(1) $\frac{1}{s}$	1 (Sprungfunktion)
(2) $\frac{1}{s-a}$	e^{at}
(3) $\frac{1}{s^2}$	t
(4) $\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$
(5) $\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cdot e^{at}$
(6) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
(7) $\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at}$

Zeigen Sie, dass der Eintrag (7) eigentlich überflüssig ist, weil er aus den vorangehenden Einträgen (1) bis (6) folgt.

Zeigen Sie also schlüssig auf, wie man die Laplace-Transformierte $F(s)$ der Originalfunktion $f(t)$ in (7) mit Hilfe der Eigenschaften der Laplace-Transformation und den in (1) bis (6) aufgeführten Laplace-Transformierten-Paaren bestimmen kann.

5 Punkte

4. Entscheiden Sie ohne Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

- | | wahr | falsch |
|---|--------------------------|--------------------------|
| Die Laplace-Transformation bildet eine Funktion auf eine Funktion ab. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Dass für die Konvergenz einer Laplace-Transformierten nur der Realteil ihrer Variablen eine Rolle spielt, ist darin begründet, dass nur reellwertige Exponentialfunktionen konvergieren können. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Die Summe zweier Funktionen ist gleich der Summe ihrer Laplace-Transformierten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Die Laplace-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist nicht gleich dem Produkt der Laplace-Transformierten der beiden einzelnen Funktionen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Der Definitionsbereich einer Originalfunktion stimmt mit dem Konvergenzbereich ihrer Laplace-Transformierten überein. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

5 Punkte