Klausur Mathematik 3 / TE / 4.2.2009

Name: .... **Punkte:** .... **Note:** ....

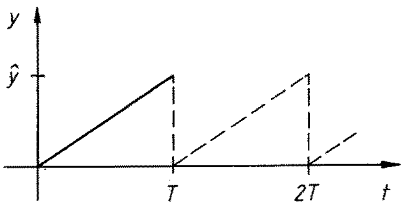
Dauer: **90 Minuten**

Hilfsmittel: **- beliebige schriftliche Unterlagen**
- Taschenrechner

Bemerkungen: **- Bei jeder Aufgabe muss der Lösungsweg vollständig, übersichtlich und verständlich dokumentiert werden.**
- Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu bearbeiten.

1. In der Fourier-Reihen-Tabelle des Lehrbuches Papula (Tabelle 2, Seiten 173 und 174) ist die reelle Fourier-Reihe einer Kippschwingung aufgeführt:

(3) Kippschwingung (Sägezahnimpuls)



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{T}\,t \qquad (0 \leqslant t < T)$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{y}}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \ldots\right]$$

Prüfen Sie die aufgeführte Fourier-Reihe nach, indem Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_0 und b_k $(k \in \mathbb{N})$ von Hand bestimmen, d.h. ohne Taschenrechner und ohne Fourier-Reihen-Tabelle.

Begründen Sie kurz (ohne Rechnung), warum die Fourier-Koeffizienten a_k $(k \in \mathbb{N})$ alle gleich Null sind.

Integraltabelle:

$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$

$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$

$\int x\cdot\sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cdot\cos(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$

$\int x\cdot\cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\cdot\sin(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$

$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C \qquad (a\neq 0)$

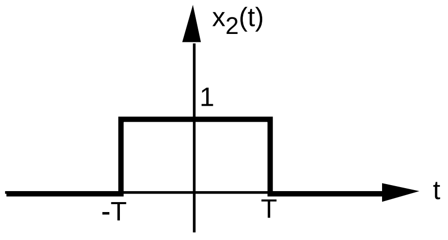
$\int x\cdot e^{ax}\,dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right)e^{ax} + C \qquad (a\neq 0)$

$\int x^2\cdot e^{ax}\,dx = \left(\frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}\right)e^{ax} + C \qquad (a\neq 0)$

5 Punkte ....

2. Gegeben ist die Funktionsgleichung der Funktion $x_1(t)$ sowie der Graf der Funktion $x_2(t)$:

$$x_1(t) = \sin(a \cdot t) \quad (a \in \mathbb{R})$$



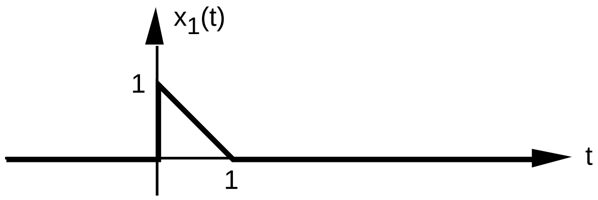
Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ der Funktion $x(t)$, die wie folgt definiert ist:

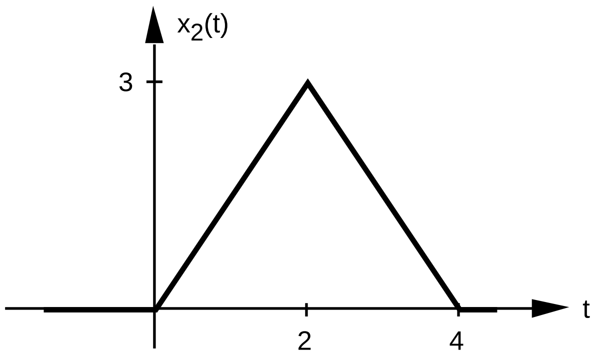
$$x(t) := x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Hinweis:
- Als Fourier-Transformations-Tabelle ist nur die auf der Seite 4 abgedruckte zugelassen.
- Allfällig auftretende Integrale müssen von Hand, d.h. ohne Taschenrechner, berechnet werden.

5 Punkte ....

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:





Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\omega)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\omega)$ und $X_1(\omega)$ in Form einer Formel $X_2(\omega) = \ldots$ an, mit welcher man $X_2(\omega)$ aus $X_1(\omega)$ bestimmen kann.

5 Punkte ....

4. Entscheiden Sie ohne Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

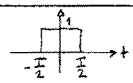
Bewertung:
- 5 Punkte für 10 richtige Antworten
- 4 Punkte für 9 oder 8 richtige Antworten
- 3 Punkte für 7 oder 6 richtige Antworten
- 2 Punkte für 5 oder 4 richtige Antworten
- 1 Punkt für 3 oder 2 richtige Antworten
- 0 Punkte für 1 oder 0 richtige Antworten

	wahr	falsch
Die reelle Fourier-Reihe und die komplexe Fourier-Reihe einer reellen, periodischen Funktion sind identische Funktionen.	☐	☐
Aperiodische Funktionen besitzen nie Fourier-Reihen.	☐	☐
Wenn alle Fourier-Koeffizienten zweier Funktionen gleicher Periode übereinstimmen, kann man folgern, dass die beiden Funktionen entweder identisch sind oder sich an höchstens endlich vielen Stellen unterscheiden.	☐	☐
In der komplexen Fourier-Reihe einer reellen Funktion ist die Summe von jeweils zwei Summanden reell.	☐	☐
Wenn man eine periodische Funktion einer Zeitverschiebung unterwirft, die nicht einem Vielfachen der Grundperiode entspricht, so gibt es stets mindestens einen Fourier-Koeffizienten, der sich dabei nicht verändert.	☐	☐
Jede periodische Funktion, die eine Fourier-Reihe besitzt, besitzt auch eine Fourier-Transformierte.	☐	☐
Jede Funktion, die eine Fourier-Transformierte besitzt, besitzt auch eine Laplace-Transformierte.	☐	☐
Eine Zeitskalierung einer aperiodischen Funktion hat im Allgemeinen sowohl auf den Betrag als auch auf das Argument der Fourier-Transformierten der Funktion einen Einfluss.	☐	☐
Die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist gleich der Faltung der Fourier-Transformierten der beiden Funktionen.	☐	☐
Wenn die Laplace-Transformierte $X(s)$ einer Funktion an der Stelle $s = 0$ nicht existiert, kann man zwingend folgern, dass die Funktion keine Fourier-Transformierte besitzt.	☐	☐

5 Punkte ....

Fourier-Transformations-Tabelle

Quelle: Martin Meyer, Signalverarbeitung, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2000, ISBN 3-528-16955-9, Tabelle Seite 51

Zeitfunktion x(t) (Re(a) > 0)	Spektralfunktion X(ω)
$\delta(t)$	1
1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$2 / j\omega$
$\varepsilon(t)$	$\pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\lvert t \rvert$	$-2 / \omega^2$
t^n	$2\pi \cdot j^n \cdot \frac{d^n}{d\omega^n}\delta(\omega)$
$e^{-a\lvert t \rvert}$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$\varepsilon(t) \cdot e^{-at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(j\omega + a)^n}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi \cdot [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$  Rechteck, Breite T, Höhe 1	$T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = T \cdot \mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$
$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$  Dreieckspuls, Breite 2T, Höhe 1	$T \cdot \mathrm{si}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$
$\mathrm{si}(\omega_0 t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$	$\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \;;\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Hinweis:
- Mit "si" ist die Funktion sinc gemeint.