

## Übung 4                      **Fourier-Reihen** **Trigonom. Basisfunktionen, Analogie Signal-Vektor, Integrale**

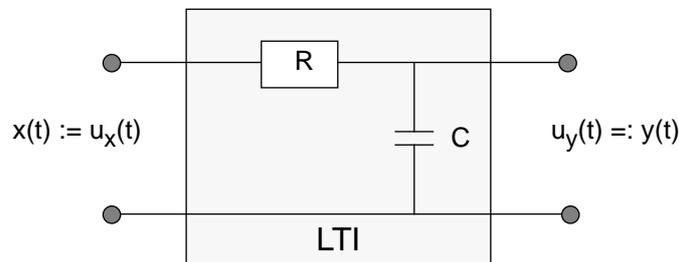
### Lernziele

- verstehen, dass es sinnvoll sein kann, eine Funktion als Linearkombination von geeigneten Basisfunktionen darzustellen.
- verstehen, dass es sinnvoll ist, ein periodisches Signal, welches durch ein LTI-System läuft, als Linearkombination von sinusförmigen Teilsignalen darzustellen.
- einfachere Integrale von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln lösen können.

### Aufgaben

#### 1.        **Trigonometrische Basisfunktionen**

Im Unterrichtszimmer ist die folgende RC-Schaltung aufgebaut ( $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 100 \text{ nF}$ ):



Die Schaltung bildet ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System).

Die an der Schaltung angelegte Spannung  $u_x(t)$  entspricht dem Eingangssignal  $x(t)$ .

Die Spannung  $u_x(t)$  über dem Kondensator entspricht dem Ausgangssignal  $y(t)$ .

Ein Funktions-Generator liefert das Eingangssignal  $x(t)$ . Der zeitliche Verlauf des Eingangssignals  $x(t)$  und des Ausgangssignals  $y(t)$  können auf einem Kathodenstrahl-Oszillografen (KO) betrachtet werden.

Die Werte von  $R$  und  $C$  sind gegeben durch  $R = 1 \text{ k}\Omega$  und  $C = 100 \text{ nF}$ .

- Stellen Sie am Funktions-Generator ein **sinusförmiges** Signal mit der Amplitude  $0.5 \text{ V}$  ( $1 \text{ V}$  peak-to-peak) und der Frequenz  $1 \text{ kHz}$  ein.  
Stellen Sie am KO fest:
  - Das Ausgangssignal ist ebenfalls ein **sinusförmiges** Signal
  - Die **Frequenz** ist gleich wie beim Eingangssignal. Lediglich **Amplitude** und **Phase** haben sich verändert.
- Variieren Sie am Funktions-Generator die Frequenz des Eingangssignals.  
Stellen Sie am KO fest:
  - Das Ausgangssignal hat immer die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal.
  - Die Amplitude und die Phase des Ausgangssignals hängen von der Frequenz ab.Begründen sie, dass es sich beim betrachteten System um einen Tiefpassfilter handelt.
- Stellen Sie nun am Funktions-Generator ein **Dreieckssignal** ein.  
Stellen Sie am KO fest:
  - Das Ausgangssignal ist **kein Dreieckssignal** mehr.

#### 2.        **Analogie Signal    Vektor**

In dieser Aufgabe soll die folgende Analogie aufgezeigt werden:

Ein Signal  $x(t)$  durchläuft ein lineares System.

Ein Vektor  $x$  wird einer linearen Abbildung (hier: Drehung) unterzogen.

Gegeben ist der folgende Vektor  $x$  im dreidimensionalen Raum:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor  $x$  wird um  $90^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht.

Gesucht ist der zu  $x$  gehörige Bildvektor  $y$ .

- Finden Sie eine Methode, um den Bildvektor  $y$  möglichst einfach zu bestimmen. Die Methode soll eine Zerlegung von  $x$  in möglichst günstige Teilvektoren beinhalten. Beschreiben Sie das Vorgehen in ein paar Stichworten.
- Erklären Sie, worin die in der Einleitung dieser Aufgabe erwähnte Analogie besteht.

### 3. Integrale

In der Herleitung der Formeln zur Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten von periodischen Funktionen treten die nachstehenden Integrale auf.

Bestimmen Sie die Integrale von Hand und mit Hilfe von Integrationstafeln.

Es gilt jeweils  $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  beliebig,  $m \in \mathbb{N}$  beliebig

a)  $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) dt$

b)  $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) dt$

c)  $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \sin(m \omega_0 t) dt$

d)  $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$

e)  $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$

**Lösungen**

1. ...

2. a) - x darstellen als Linearkombination der Basisvektoren  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  :

$$x = \frac{2}{5} = 2 e_1 + 4 e_2 + 5 e_3$$

- Drehung auf die einzelnen Basisvektoren anwenden:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \\ e_3 & e_3 \end{pmatrix}$$

- Bildvektor als Linearkombination der Bildvektoren der Basisvektoren zusammensetzen:

$$y = 2 e_2 + 4 (-e_1) + 5 e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Analogie in tabellarischer Darstellung:

Signal x(t)	Vektor x
Das Signal x(t) durchläuft ein lineares System.	Der Vektor x wird einer linearen Abbildung unterworfen.
Basis-signale $x_1(t)$ , $x_2(t)$ , $x_3(t)$ , ...	Basisvektoren $e_1$ , $e_2$ , $e_3$
Das Signal x(t) wird dargestellt als Linearkombination der Basis-signale $x_1(t)$ , $x_2(t)$ , $x_3(t)$ , ...	Der Vektor wird dargestellt als Linearkombination der Basisvektoren $e_1$ , $e_2$ , $e_3$
Die Basis-signale $x_1(t)$ , $x_2(t)$ , $x_3(t)$ , ... verhalten sich bezüglich des betrachteten Systems sehr einfach.	Die Basisvektoren $e_1$ , $e_2$ , $e_3$ verhalten sich gegenüber der betrachteten Abbildung sehr einfach.
Das Ausgangssignal y(t) setzt sich zusammen als Linearkombination der Ausgangssignale der einzelnen Basis-signale.	Der Bildvektor y setzt sich zusammen als Linearkombination der Bildvektoren der einzelnen Basisvektoren.

3. a)  $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) dt = 0$

b)  $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) dt = 0$

c)  $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \sin(m \omega_0 t) dt = \frac{T_0}{2} \quad (k \neq m)$

d)  $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt = \frac{T_0}{2} \quad (k \neq m)$

e)  $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt = 0$