

Übung 44 Repetition Fourier-Reihen

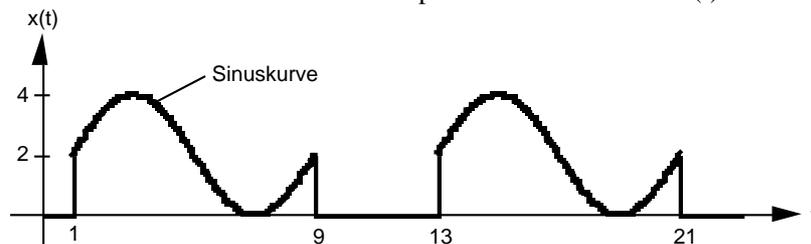
Aufgaben

1. Gegeben ist die folgende periodische Funktion $x(t)$:

$$x(t) = 2 \sin(3t) + 4 \cos(15t)$$

- a) Bestimmen Sie alle reellen Fourier-Koeffizienten $a_0, a_k (k \in \mathbb{N})$ und $b_k (k \in \mathbb{N})$.
b) Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k (k \in \mathbb{Z})$.

2. Gegeben ist ein Ausschnitt des Grafen einer periodischen Funktion $x(t)$:



Die Funktion $x(t)$ kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \sin(k \omega_0 t)) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}, T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

Stellen Sie die für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_0, a_k und b_k benötigten Integrale auf.

Sie sollen die Integrale nur so weit aufbereiten, dass sie jemand, der nichts von Fourier-Reihen versteht und die Funktion $x(t)$ nicht kennt, berechnen kann.

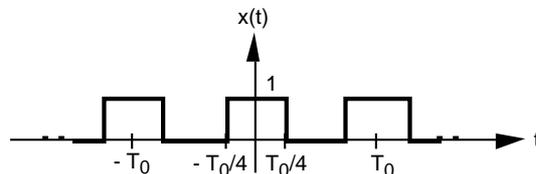
3. Jede periodische Funktion $x(t)$ kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \sin(k \omega_0 t)) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}, T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

Beurteilen Sie, ob die folgende Behauptung wahr oder falsch ist:

"Wenn alle Koeffizienten $a_k (k \in \mathbb{N})$ gleich Null sind, dann kann man folgern, dass $x(t)$ ungerade ist."

4. Gegeben sind das periodische Rechtecksignal $x(t)$ sowie seine komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k (k \in \mathbb{Z})$:



$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } \neq 0) \end{cases}$$

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der mittleren Signalleistung, welcher zusammen im konstanten Anteil und in den ersten vier Oberschwingungen steckt.

Lösungen

1. a) $a_0 = 0$
 $a_5 = 4, a_k = 0 \text{ (} k \neq 5 \text{)}$
 $b_1 = 2, b_k = 0 \text{ (} k \neq 1 \text{)}$
- b) $c_1 = -j, c_{-1} = j, c_5 = c_{-5} = 2, c_k = 0 \text{ (} k \neq \pm 1, \pm 5 \text{)}$

$$2. \quad a_0 = \frac{1}{12} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right) \right) dt$$

$$a_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right) \right) \cos\left(k \frac{\pi}{6} t\right) dt$$

$$b_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{6} t\right) dt$$

3. ...

$$4. \quad \text{Anteil} = \frac{|c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 + |c_{-3}|^2 + |c_3|^2 + |c_{-5}|^2 + |c_5|^2}{\frac{1}{T_0} \int_1^9 |x(t)|^2 dt} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{518}{225}}{\frac{1}{2}} = 0.967 = 96.7 \%$$