

## Übung 2                      Funktionen    Periodizität, Symmetrie

### Lernziele

- neue Sachverhalte analysieren können.
- beurteilen können, ob eine Funktion periodisch ist oder nicht.
- die Grundperiode einer Funktion bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine Funktion gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade ist.

### Aufgaben

#### Periodizität

Bei den Aufgaben 1 bis 4 können Sie von der folgenden Voraussetzung ausgehen:  
 $x(t) = \sin(t)$  bzw.  $\cos(t)$       Grundperiode  $T_0 = 2$

- Gegeben sind die beiden Funktionen  $x_1(t) = \sin(\omega t)$  und  $x_2(t) = \cos(\omega t)$ .
  - Geben Sie die Grundperiode  $T_0$  der Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  an.
  - Geben Sie alle Perioden  $T$  der Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  an.
- Gegeben sind die beiden Funktionen  $x_1(t) = \sin(k \omega t)$  und  $x_2(t) = \cos(k \omega t)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - Geben Sie die Grundperiode  $T_0$  der beiden Funktionen an.
  - Zeigen Sie, dass  $T = \frac{2}{\omega}$  eine Periode der beiden Funktionen ist.
- Beurteilen Sie, ob die gegebenen Funktionen periodisch sind oder nicht.  
Geben Sie für die periodischen Funktionen die Grundperiode  $T_0$  an.  
Sie müssen keine strengen Beweise führen. Es genügt z.B., wenn Sie den Grafen der Funktion skizzieren und daraus die Grundperiode herauslesen.
  - $x(t) = |\cos(t)|$
  - $x(t) = \sin(|t|)$
  - $x(t) = \cos(|t|)$
  - $x(t) = \cos^2(2t)$
  - $x(t) = \cos(t^2)$
  - $x(t) = e^{jt}$
  - $x(t) = e^{j\omega t}$
  - $x(t) = e^{jk\omega t}$
  - $x(t) = \sin(t) \cdot \cos(t)$
  - $x(t) = \sin(t) + \cos(t)$
  - $x(t) = \sin(3t) + \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$
  - $x(t) = \cos(2t) + \cos(\omega t)$
- Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen, und bestimmen Sie deren Grundperiode  $T_0$ :
  - $x(t) = \begin{cases} t^2 & (-t < 0) \\ 0 & (0 \leq t) \end{cases}$ ,       $x(t+2) = x(t)$   
 $\frac{2}{t}$        $\left(0 < t < \frac{1}{2}\right)$
  - $x(t) = \begin{cases} -\frac{2}{t} + 2 & \left(\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}\right) \\ \frac{2}{t} - 4 & \left(\frac{3}{2} < t < 2\right) \end{cases}$ ,       $x(t+2) = x(t)$

*Symmetrie*

5. Überlegen Sie sich die Richtigkeit der Bemerkungen 1 und 2 auf dem Theorieblatt "Symmetrie" durch anschauliche Argumente, d.h. ohne strenge Beweise.
6. Überlegen Sie sich die Richtigkeit der Bemerkung 3 auf dem Theorieblatt "Symmetrie".  
Vorgehen:  
- Betrachten Sie das Produkt zweier Funktionen  $x(t) := x_1(t) \cdot x_2(t)$ .  
- Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen wahr sind:  
i)  $x_1$  gerade  $x_2$  gerade  $x$  gerade, d.h.  $x(-t) = x(t)$   
ii)  $x_1$  ungerade  $x_2$  ungerade  $x$  gerade, d.h.  $x(-t) = x(t)$   
iii)  $x_1$  gerade  $x_2$  ungerade  $x$  ungerade, d.h.  $x(-t) = -x(t)$
7. \* Überlegen Sie sich die Richtigkeit der Bemerkung 4 auf dem Theorieblatt Seite 2.  
Vorgehen:  
- Betrachten Sie die folgenden beiden Funktionen  $x_g$  und  $x_u$ :  
$$x_g(t) := \frac{1}{2} (x(t) + x(-t))$$
$$x_u(t) := \frac{1}{2} (x(t) - x(-t))$$
  
- Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen wahr sind:  
i) Für jede beliebige Funktion  $x(t)$  ist die Funktion  $x_g$  eine gerade Funktion.  
ii) Für jede beliebige Funktion  $x(t)$  ist die Funktion  $x_u$  eine ungerade Funktion.  
iii)  $x(t) = x_g(t) + x_u(t)$
8. Beurteilen Sie, ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade sind:
- |  |  |
|--|--|
| a) $y(x) = x^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) | b) $x(t) = \sin(t)$                            |
| c) $x(t) = \cos(t)$                    | d) $x(t) = \sin(2t)$                           |
| e) $f(x) =  \sin(2x) $                 | f) $y(x) = x \cdot \sin(x^2)$                  |
| g) $f(x) = x^2 \cdot \sin( x )$        | h) $y(t) = e^t$                                |
| i) $f(x) = e^{-x^2}$                   | j) $x(t) = e^{jt}$                             |
| k) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$           | l) $x(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| m) $y(t) = 2t^2 + 3t + 4$              | n) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$                  |

**Lösungen**

1. a)  $T_0 = \frac{2}{0}$   
 b)  $T = k \cdot T_0 = k \cdot \frac{2}{0}$  (k  $\in \mathbb{Z}$ )
2. a)  $T_0 = \frac{2}{k \cdot 0}$   
 b)  $T = k \cdot T_0$ , d.h. T ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode  $T_0$ .
3. a)  $T_0 =$  b) nicht periodisch  
 c)  $T_0 = 2$  d)  $T_0 = \frac{2}{k}$   
 e) nicht periodisch f)  $T_0 = 2$   
 g)  $T_0 = \frac{2}{0}$  h)  $T_0 = \frac{2}{k \cdot 0}$   
 i)  $T_0 =$  j)  $T_0 = 2$   
 k)  $T_0 = 4$  l) nicht periodisch
4. a)  $T_0 = 2$  b)  $T_0 = 2$
5. ....
6. i)  $x(-t) = x_1(-t) \cdot x_2(-t)$   
 $= x_1(t) \cdot x_2(-t)$  (da  $x_1$  gerade ist  $x_1(-t) = x_1(t)$ )  
 $= x_1(t) \cdot x_2(t)$  (da  $x_2$  gerade ist  $x_2(-t) = x_2(t)$ )  
 $= x(t)$   
 ii) ...  
 iii) ...
7. \* i)  $x_g(-t) = \frac{1}{2} (x(-t) + x(t)) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t)) = x_g(t)$   
 ii) ...  
 iii)  $x_g(t) + x_u(t) = \frac{1}{2} (x(-t) + x(t)) + \frac{1}{2} (x(-t) - x(t)) = x(t)$
8. a) gerade, falls n gerade b) ungerade  
 ungerade, falls n ungerade  
 c) gerade d) ungerade  
 e) gerade f) ungerade  
 g) gerade h) weder gerade noch ungerade  
 i) gerade j) weder gerade noch ungerade  
 k) ungerade l) weder gerade noch ungerade  
 m) weder gerade noch ungerade n) weder gerade noch ungerade