

Übung 13 Fourier-Transformation Fourier-Koeffizienten als Abtastwerte der FT einer Grundperiode

Lernziel

- einen neuen Sachverhalt an einem konkreten Beispiel nachprüfen können.

Aufgabe

Im Unterricht wurde die folgende Aussage bewiesen:

Die Fourier-Koeffizienten c_k einer periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ mit der Grundperiode T_0 können aus Abtastwerten der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ einer aperiodischen Funktion $x(t)$ gewonnen werden, welche über ein **beliebiges** Intervall der Länge T_0 gleich der periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ und ausserhalb dieses Intervalles gleich Null ist:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k \cdot \omega_0)$$

Prüfen Sie diese Aussage, indem Sie für die untenstehenden Beispiele a) und b) die folgenden Teilaufgaben bearbeiten:

- i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $\tilde{x}(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.
- ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $\tilde{x}(t)$ auf "herkömmliche" Weise, d.h. aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) oder direkt aus $\tilde{x}(t)$.
- iii) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
- iv) Stellen Sie fest, dass gilt:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_1(k \cdot \omega_0) = \frac{1}{T_0} X_2(k \cdot \omega_0)$$

a)
$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T_0}{4} \\ 0 & \frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0 < t < T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $\tilde{x}(t)$ haben Sie bereits in der Übung 10 bestimmt.
- Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ haben Sie bereits in der Übung 12 bestimmt.

b) *
$$\tilde{x}(t) = \frac{\hat{x}}{T_0} t \quad (0 < t < T_0), \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0 < t < T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

Lösungen

a) i) ...

$$\frac{1}{2} \quad (k=0)$$

$$\text{ii) } c_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$$

$$\text{iii) } X_1(\omega) = \begin{cases} \frac{2 \sin \frac{T_0}{4}}{\omega} & (\omega \neq 0) \\ \frac{T_0}{2} & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{j} \left(1 - e^{-j T_0/4} + e^{-j T_0} (e^{j T_0/4} - 1) \right) & (\omega \neq 0) \\ \frac{T_0}{2} & (\omega = 0) \end{cases}$$

iv) ...

b) * i) ...

$$\text{ii) } c_k = \begin{cases} j \frac{\hat{x}}{2k} & (k \neq 0) \\ \frac{\hat{x}}{2} & (k=0) \end{cases}$$

$$\text{iii) } X_1(\omega) = \begin{cases} \frac{\hat{x}}{T_0} \frac{1}{2} (e^{-j T_0} (1 + j T_0 \omega) - 1) & (\omega \neq 0) \\ \frac{\hat{x}}{2} T_0 & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \frac{\hat{x}}{T_0} \frac{1}{2} e^{-j T_0/2} \left(j \frac{T_0}{2} \omega + 1 - e^{j T_0/2} - j \frac{T_0}{2} \omega + 1 \right) + j \frac{\hat{x}}{2} (1 - e^{j T_0/2}) & (\omega \neq 0) \\ \frac{\hat{x}}{2} T_0 & (\omega = 0) \end{cases}$$

iv) ...