

## Übung 19                      **Fourier-Transformation** **Faltungseigenschaft**

### Lernziele

- die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation kennen und verstehen.
- die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation anwenden können.
- verstehen, warum die Fourier-Transformierte der Stossantwort eines LTI-Systems als Frequenzgang bezeichnet wird.
- verstehen, dass die Reihenfolge zweier oder mehrerer hintereinander geschalteter LTI-Systeme vertauscht werden kann.
- verstehen, dass ein komplexes exponentielles Signal eine Eigenfunktion eines LTI-Systems ist.
- verstehen, dass ein LTI-System mit reeller Stossantwort einen sinusförmigen Input in einen sinusförmigen Output mit derselben Frequenz überführt.
- bei einem LTI-System mit bekanntem Frequenzgang den Output zu einem sinusförmigen Input bestimmen können.
- verstehen, dass ein RC-Glied ein Tiefpassfilter ist.

### Einleitung

Die Fourier-Transformation FT hat die folgende **Faltungseigenschaft** (ohne Beweis):

$$FT(x_1(t) * x_2(t)) = FT(x_1(t)) \cdot FT(x_2(t))$$

oder anders geschrieben:

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

d.h. die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der einzelnen Funktionen.

### Aufgaben

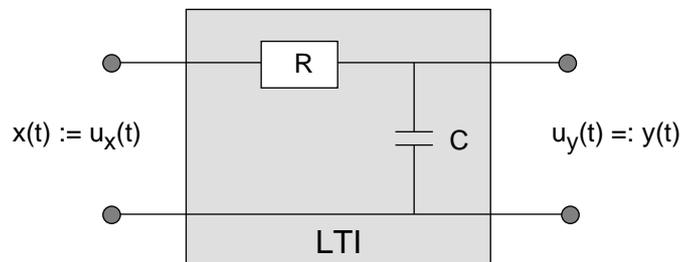
1. Prüfen Sie die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation am Beispiel des folgenden LTI-Systems nach:

Stossantwort	$h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$
Input	$x(t) = e^{-2t} \cdot u(t)$

Anleitung:

- Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte  $H(\omega)$  von  $h(t)$  nach.
  - Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte  $X(\omega)$  von  $x(t)$  nach.
  - Bestimmen Sie das Produkt  $H(\omega) \cdot X(\omega)$ .
  - Bestimmen Sie den Output  $y(t)$ , indem Sie  $h(t)$  und  $x(t)$  falten, d.h.  $y(t) = h(t) * x(t)$ .
  - Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte  $Y(\omega)$  von  $y(t)$ .  
Überzeugen Sie sich davon, dass das Resultat mit demjenigen aus iii) übereinstimmt, d.h. dass gilt:  $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$
2. Bei einem LTI-System erhält man das Spektrum  $Y(\omega)$  des Outputs  $y(t)$ , indem man das Spektrum  $X(\omega)$  des Inputs  $x(t)$  mit dem sogenannten **Frequenzgang**  $H(\omega)$  des LTI-Systems multipliziert.
- Erklären Sie, inwiefern die Funktion  $H(\omega)$  ein "Frequenzverhalten" des LTI-Systems ausdrückt. Überlegen Sie sich dazu, wie das LTI-System den Input  $x(t)$  bezüglich seiner Frequenzanteile beeinflusst.
  - Skizzieren Sie den Frequenzgang  $H(\omega)$  eines idealen **Tiefpassfilters**.  
Ein ideales Tiefpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile bis zu einer bestimmten maximalen Frequenz durchlässt und alle Anteile höherer Frequenzen unterdrückt.

- c) Skizzieren Sie den Frequenzgang  $H(\omega)$  eines idealen **Hochpassfilters**.  
Ein ideales Hochpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile ab einer bestimmten minimalen Frequenz durchlässt und alle Anteile tieferer Frequenzen unterdrückt.
- d) Skizzieren Sie den Frequenzgang  $H(\omega)$  eines idealen **Bandpassfilters**.  
Ein ideales Bandpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile zwischen einer minimalen und einer maximalen Frequenz durchlässt und alle Anteile unterdrückt, welche ausserhalb dieses Frequenzbandes liegen.
3. Gegeben sind zwei beliebige LTI-Systeme mit den Stossantworten  $h_1(t)$  und  $h_2(t)$  bzw. den Frequenzgängen  $H_1(\omega)$  und  $H_2(\omega)$ .  
Schaltet man die beiden LTI-Systeme hintereinander, so ergibt sich gesamthaft ein neues LTI-System mit dem Frequenzgang  $H(\omega)$ .
- a) Zeigen Sie, dass  $H(\omega)$  gegeben ist durch  $H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$ .
- b) Erklären Sie mit Hilfe des Resultates aus a), dass der Frequenzgang  $H(\omega)$  nicht von der Reihenfolge abhängt, in welcher man die beiden LTI-Systeme hintereinander schaltet.
- c) Ein Beispiel eines LTI-Systems ist das folgende RC-Glied (vgl. Unterricht):



Skizzieren Sie das Schaltbild eines LTI-Systems, welches aus drei hintereinander geschalteten RC-Gliedern besteht.

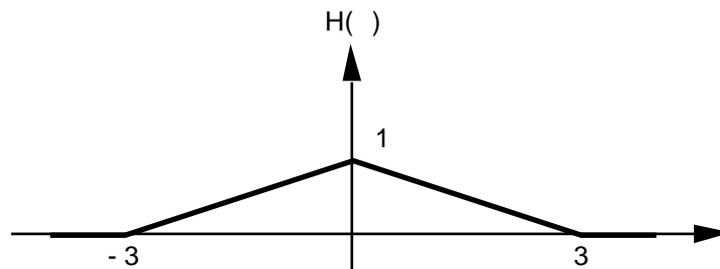
4. Gegeben ist ein beliebiges LTI-System mit der **beliebigen** Stossantwort  $h(t)$  bzw. dem Frequenzgang  $H(\omega)$ .  
Bestimmen Sie den zum komplexen exponentiellen Input  $\mathbf{x}(t) = e^{j\omega t}$  gehörenden Output  $y(t)$ .  
Stellen Sie dabei fest, dass  $y(t)$  ein **Vielfaches** von  $x(t)$  ist.  
Def.: Einen Input  $x(t)$ , dessen zugehöriger Output  $y(t)$  ein Vielfaches von  $x(t)$  ist, bezeichnet man als **Eigenfunktion** des LTI-Systems.  
Anleitung:  
i) Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte  $X(\omega)$  des Inputs  $x(t)$  nach.  
ii) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltungseigenschaft die Fourier-Transformierte  $Y(\omega)$  des Outputs  $y(t)$ .  
iii) Bestimmen Sie aus  $Y(\omega)$  die Rücktransformierte  $y(t)$ .
5. Gegeben sind ein LTI-System mit einer **reellen** Stossantwort  $h(t)$  sowie der sinusförmige Input  $\mathbf{x}(t) = \hat{x} \sin(\omega_0 t + \phi)$ .  
Bestimmen Sie den Output  $y(t)$ .  
Zeigen Sie, dass  $y(t)$  eine **sinusförmige** Funktion ist mit derselben Frequenz  $\omega_0$  wie der Input  $x(t)$ .  
Anleitung:  
i) Formen Sie  $x(t)$  gemäss Euler in eine Summe komplexer exponentieller Funktionen um.  
ii) Nützen Sie das Resultat aus der Aufgabe 4 sowie die Linearität des LTI-Systems, um den Output  $y(t)$  zu bestimmen.  
iii) Schreiben Sie den Frequenzgang  $H(\omega)$  in der Polarform  $H(\omega) = R(\omega) e^{j\phi(\omega)}$   
iv) (siehe Seite 3)

- iv) Verwenden Sie, dass  $\operatorname{Re}\{\cdot\}$  eine gerade und  $\operatorname{Im}\{\cdot\}$  eine ungerade Funktion ist. Dies gilt nur unter der Voraussetzung, dass  $h(t)$  reell ist (vgl. Übung 16).
- v) Formen Sie  $y(t)$  gemäss Euler in eine Sinus-Funktion um.

6. Gegeben ist der Input  $x(t)$  eines LTI-Systems sowie der Frequenzgang  $H(\omega)$  des LTI-Systems.

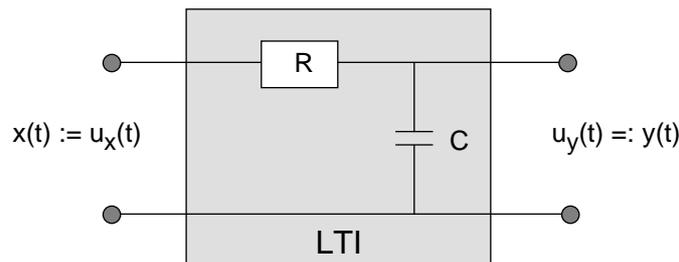
Bestimmen Sie den zum Input  $x(t)$  gehörigen Output  $y(t)$ , indem Sie das Ergebnis der Aufgabe 5 anwenden.

a)  $x(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t)$



b)  $x(t) = 2 \sin(3t+4)$   
 $H(\omega) = \frac{1}{1+j}$

7. Das abgebildete RC-Glied kann als LTI-System aufgefasst werden (vgl. Unterricht oder Aufgabe 3c).



Der Frequenzgang  $H(\omega)$  dieses RC-Gliedes lautet wie folgt (ohne Herleitung):

$$H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$$

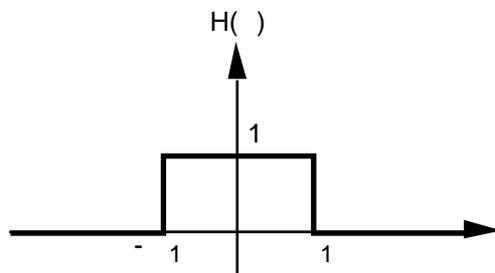
- a) Bestimmen Sie den Betrag  $|H(\omega)|$  des Frequenzganges  $H(\omega)$ .
- b) Skizzieren Sie grob den Grafen von  $|H(\omega)|$ .
- c) Erklären Sie anhand des in b) skizzierten Grafen, dass das LTI-System ein Tiefpassfilter ist.
- d) Am System mit den Parameterwerten  $R = 1 \text{ k}\Omega$  und  $C = 100 \text{ nF}$  werde der Input  $x(t) = \sin(\omega t)$  angelegt. Bestimmen Sie die Grenzfrequenz  $f_{\max} = \omega_{\max}/2\pi$ , ab welcher die mittlere Leistung des Outputs  $y(t)$  nur noch die Hälfte der mittleren Leistung des Inputs beträgt.

**Lösungen**

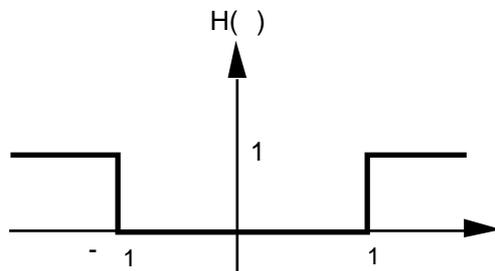
1. i)  $H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$
- ii)  $X(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$
- iii)  $H(\omega) \cdot X(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$
- iv)  $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) \cdot u(t)$
- v)  $Y(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = H(\omega) \cdot X(\omega)$

2. a)  $H(\omega_0)$ , d.h. der Wert der Funktion  $H(\omega)$  an der Stelle  $\omega = \omega_0$ , bestimmt den Einfluss des LTI-Systems auf den Input  $x(t)$  bezüglich der Frequenz  $\omega_0$ .  $H(\omega_0)$  drückt also aus, inwiefern sich der Output  $y(t)$  bezüglich der Frequenz  $\omega_0$  vom Input  $x(t)$  unterscheidet. Die Funktion  $H(\omega)$  beschreibt also das Verhalten des LTI-Systems bezüglich der Frequenzen  $\omega$ .

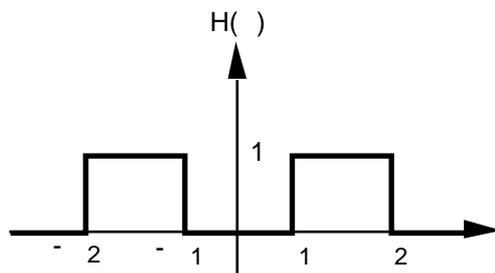
b)



c)

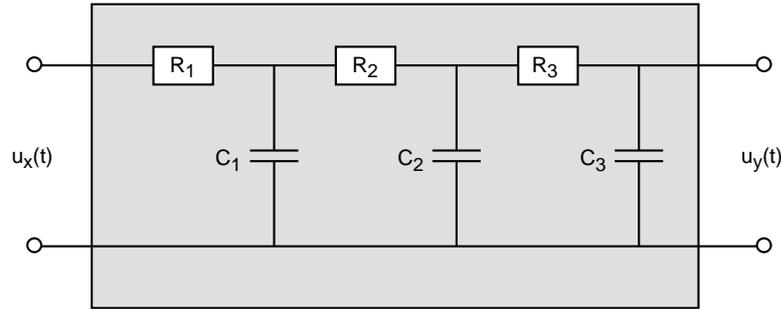


d)



3. a)  $x(t) :=$  Input  
 $y(t) :=$  Output nach dem ersten LTI-System = Input vor dem zweiten LTI-System  
 $z(t) :=$  Output  
 $Z(\omega) = H_2(\omega) \cdot Y(\omega) = H_2(\omega) \cdot (H_1(\omega) \cdot X(\omega)) = (H_2(\omega) \cdot H_1(\omega)) \cdot X(\omega) \stackrel{!}{=} H(\omega) \cdot X(\omega)$   
 $H(\omega) = H_2(\omega) \cdot H_1(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)$
- b) Reihenfolge der Faktoren  $H_1(\omega)$  und  $H_2(\omega)$  in a) spielt wegen der Kommutativität der Multiplikation keine Rolle.

c)



4. i)  $X(\omega) = 2 \cdot (\dots - \omega)$   
 ii)  $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) = H(\omega) \cdot 2 \cdot (\dots - \omega) = H(\omega) \cdot 2 \cdot (\dots - \omega)$   
 iii)  $y(t) = H(\omega) e^{j\omega t} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{x}(t)$

5. i)  $x(t) = \hat{x} \frac{1}{2j} (e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)})$   
 $= \hat{x} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} e^{j\phi} - e^{-j\omega t} e^{-j\phi})$   
 $= \hat{x} \frac{1}{2j} e^{j\omega t} e^{j\phi} - \hat{x} \frac{1}{2j} e^{-j\omega t} e^{-j\phi}$   
 ii)  $y(t) = \hat{x} \frac{1}{2j} e^{j\omega t} H(\omega) e^{j\phi} - \hat{x} \frac{1}{2j} e^{-j\omega t} H(-\omega) e^{-j\phi}$   
 $= \hat{x} \frac{1}{2j} (H(\omega) e^{j(\omega t + \phi)} - H(-\omega) e^{-j(\omega t + \phi)})$   
 iii)  $y(t) = \hat{x} \frac{1}{2j} (R(\omega) e^{j(\omega t + \phi)} - R(-\omega) e^{-j(\omega t + \phi)})$   
 iv)  $y(t) = \hat{x} \frac{1}{2j} (R(\omega) e^{j(\omega t + \phi)} - R(\omega) e^{-j(\omega t + \phi)})$   
 $= \hat{x} R(\omega) \frac{1}{2j} (e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)})$   
 v)  $y(t) = R(\omega) \hat{x} \sin(\omega t + \phi)$

6. a)  $y(t) = \frac{2}{3} \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(2t)$   
 b)  $y(t) = \frac{2}{\sqrt{10}} \sin(3t + 4 - \arctan(3))$

7. a)  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$

- b) ...  
 c) ...

d) Mittlere Leistungen:  $\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt$

$$\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$|H(\omega_{\max})|^2 = \frac{1}{1+(RC\omega_{\max})^2} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_{\max} = \frac{1}{RC} = 10^4 \frac{1}{s}$$

$$f_{\max} = \omega_{\max}/2\pi = 1.6 \text{ kHz}$$