

## Übung 26                      **Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA)** **Abtasttheorem, Rekonstruktion**

### Lernziele

- selbstständig und in Gruppen neue Sachverhalte bearbeiten können.
- das Abtasttheorem von Shannon kennen und verstehen.
- verstehen, dass bei nicht-erfülltem Abtasttheorem die ursprüngliche zeitkontinuierliche Funktion aus der abgetasteten Funktion nicht mehr rekonstruiert werden kann.
- verstehen, dass verschiedene Funktionen bei gleicher Abtastperiode auf gleiche Abtastfunktionen führen können.

### Aufgaben

#### *Abtasttheorem, Rekonstruktion*

1. Studieren Sie im Buch *Meyer* den Abschnitt 5.2.4 *Das Abtasttheorem* (Seiten 140 bis 142).
2. Erklären Sie mit Hilfe einer grafischen Darstellung die folgende Aussage (*Meyer*, Seite 142 Mitte):  
"Dieses Filter hat keinen unendlich steilen Übergangsbereich, deshalb ist eine leichte Überabtastung notwendig."
3. Lesen Sie im Buch *Meyer* die ersten vier Zeilen des Abschnittes 5.2.6 *Die Rekonstruktion von abgetasteten Signalen* (Seite 144).
4. Gegeben ist die zeitkontinuierliche Funktion  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ .  
Aus  $x(t)$  erhält man die abgetastete Funktion  $x_a(t)$ , indem man  $x(t)$  mit der Abtastperiode  $T$  bzw. mit der Abtastfrequenz  $\omega_a := 2\pi/T$  abtastet.  
Aus  $x_a(t)$  erhält man die Funktion  $y(t)$ , indem man  $x_a(t)$  mit einem idealen Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz  $\omega_a/2$  filtert und mit dem Faktor  $T$  gewichtet. Das Tiefpassfilter inklusive Gewichtung kann dabei als LTI-System aufgefasst werden mit dem Frequenzgang  $H(\omega)$ . Wenn bei der Abtastung das Abtasttheorem erfüllt ist, ist  $y(t)$  die ursprüngliche Funktion  $x(t)$ , d.h.  $y(t) = x(t)$ .
  - a) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $X(\omega)$  der Funktion  $x(t)$ .  
Nehmen Sie nun an, das **Abtasttheorem** sei **erfüllt**, d.h. es gelte  $\omega_a > 2\omega_0$ .
  - b) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $X_a(\omega)$  der abgetasteten Funktion  $x_a(t)$ .
  - c) Zeichnen Sie den Grafen des Frequenzganges  $H(\omega)$  des Tiefpassfilters inklusive Gewichtung.
  - d) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $Y(\omega)$  der Funktion  $y(t)$ .  
Stellen Sie dabei fest, dass  $Y(\omega) = X(\omega)$  und somit  $y(t) = x(t)$  gilt.  
Nehmen Sie nun an, das **Abtasttheorem** sei **nicht erfüllt**, d.h. es gelte  $\omega_a < 2\omega_0$ .
    - e) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $X_a(\omega)$  der abgetasteten Funktion  $x_a(t)$ .
    - f) Zeichnen Sie den Grafen des Frequenzganges  $H(\omega)$  des Tiefpassfilters inklusive Gewichtung.
    - g) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $Y(\omega)$  der Funktion  $y(t)$ .  
Stellen Sie dabei fest, dass  $Y(\omega) \neq X(\omega)$  und somit  $y(t) \neq x(t)$  gilt.

Verschiedene Funktionen gleiche Abtastfunktion

5. Gegeben ist das folgende Fourier-Transformiertenpaar (Meyer, Tabelle Seite 51):

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \sin(t) & (t \neq 0) \\ 1 & (t=0) \end{cases} \quad \circ \bullet \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < 1) \\ 0 & (|\omega| > 1) \end{cases}$$

Tastet man  $x(t)$  mit der Abtastperiode  $T$  bzw. mit der Abtastfrequenz  $\omega_a := 2\pi/T$  ab, wobei das Abtasttheorem erfüllt sein soll, so erhält man die Abtastfunktion  $x_a(t)$ .

- Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $X(\omega)$  der Funktion  $x(t)$ .
- Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $X_a(\omega)$  der abgetasteten Funktion  $x_a(t)$ .

Es gibt unendlich viele andere, von  $x(t)$  unterschiedliche Funktionen, die auf die gleiche Abtastfunktion  $x_a(t)$  führen, wenn man sie mit der gleichen Periode abtastet wie  $x(t)$ .

- Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten  $Y(\omega)$  einer solchen Funktion  $y(t)$ . Betrachten Sie also den in b) gezeichneten Grafen von  $X_a(\omega)$ , und finden Sie daraus den Grafen einer Fourier-Transformierten  $Y(\omega)$ , so dass  $Y_a(\omega) = X_a(\omega)$ .
- Überlegen Sie sich, dass bei der Abtastung der unter c) betrachteten Funktion  $y(t)$  das Abtasttheorem nicht erfüllt ist.

### Lösungen

1. ...
2. ...
3. ...
4.
  - a) ...
  - b) ...
  - c) ...
  - d) ...
5.
  - a) ...
  - b) ...
  - c) ...
  - d) ...