

## Übung 15                      **Fourier-Transformation** **Faltung**

### Lernziele

- wissen, wie die Faltung zweier Funktionen definiert ist.
- wissen, dass die Faltung das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllt.
- sich das Faltungsintegral zweier Funktionen grafisch vorstellen können.
- die Faltung zweier einfacher Funktionen grafisch ausführen können.

### Einleitung

Die Faltung zweier Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  ist wie folgt definiert:

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

Die Faltung erfüllt die folgenden Rechengesetze:

Kommutativgesetz:  $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

Assoziativgesetz:  $(x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) = x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t))$

Distributivgesetz:  $x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

### Aufgaben

1. Veranschaulichen Sie sich das Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

anhand der beiden konkreten Funktionen

$$x_1(t) = e^{-at} \quad (t) \quad (a>0)$$

$$x_2(t) = \delta(t)$$

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- a) Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen:

i)  $x_1(\tau)$

ii)  $x_2(\tau)$

iii)  $x_2(-\tau)$

iv)  $x_2(t-\tau)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $t>0$  und  $t<0$ .

v)  $x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $t>0$  und  $t<0$ .

- b) Finden Sie mit Hilfe der Grafen aus a) eine geometrische Veranschaulichung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

2. (siehe Seite 2)

2. Die Funktion  $y(t)$  sei definiert als Faltung der beiden Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ :

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t)$$

- i) Skizzieren Sie die Grafen von  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ .
- ii) Bestimmen Sie  $y(t)$  auf grafische Weise, d.h. nach dem in der Aufgabe 1 aufgezeigten grafischen Vorgehen.
- iii) Skizzieren Sie den Grafen von  $y(t)$ .

a)  $x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 1) \end{cases}$

b)  $x_1(t) = t$   
 $x_2(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 1) \end{cases}$

c) \*  $x_1(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ -t+2 & (1 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 2) \end{cases}$   
 $x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 2) \end{cases}$

3. \* Beweisen Sie das Kommutativgesetz der Faltung.

Hinweis:

Führen Sie im Faltungsintegral eine geeignete Substitution durch.

4. \* Im Unterricht wurde gezeigt, dass die Faltung einer Funktion  $x(t)$  mit der Dirac'schen Delta-"Funktion"  $\delta(t)$  die Funktion  $x(t)$  selbst ergibt:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage direkt aus der Ausblendeigenschaft der Dirac'schen Delta-"Funktion"  $\delta(t)$  folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

**Lösungen**

1. a) ...  
 b)  $\int x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$   
 ist die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion  $x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$  und der  $\tau$ -Achse.

2. a) i) ...  
 ii)  $y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0 \quad t > 2) \\ t & (0 \leq t \leq 1) \\ -t+2 & (1 \leq t \leq 2) \end{cases}$

- iii) ...  
 b) i) ...  
 ii)  $y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{t^2}{2} & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{1}{2} & (t > 1) \end{cases}$

- iii) ...  
 c) \* i) ...  
 ii)  $y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \leq t \leq 1) \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 & (1 \leq t \leq 3) \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8 & (3 \leq t \leq 4) \\ 0 & (t < 0 \quad t > 4) \end{cases}$   
 iii) ...

3. \*  $\int x_1(t) * x_2(t) dt = \int x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$  | Substitution  $s := t - \tau$   
 $= \int x_1(t-s) x_2(s) (-ds)$   
 $= \int x_1(t-s) x_2(s) ds$   
 $= \int x_2(s) x_1(t-s) ds$   
 $= x_2(t) * x_1(t)$

4. \*  $\int x(t) (t-t_0) dt = x(t_0)$  | Umbenennung  $t_0$

$\int x(t) (t-\tau) dt = x(\tau)$  | Umbenennung  $t$

$\int x(\tau) (\tau-t) d\tau = x(t)$  |  $(\tau-t) = (t-\tau)$

$\int x(\tau) (t-\tau) d\tau = x(t)$