

Übung 26 z-Transformation Eigenschaften der z-Transformation

Lernziel

- die Eigenschaften der z-Transformation bei der Bestimmung der z-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion anwenden können.

Aufgabe

Lösen Sie für die gegebene zeitdiskrete Funktion $x[n]$ die folgenden Teilaufgaben:

- i) Bestimmen Sie den algebraischen Ausdruck für die z-Transformierte $X(z)$. Benützen Sie dazu lediglich die Transformationstabelle (kopiertes Blatt) sowie die Eigenschaften der z-Transformation.
- ii) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der z-Transformierten $X(z)$.
- iii) Geben Sie den algebraischen Ausdruck für die Fourier-Transformierte $X_a(\omega) = \text{FTA}(x[n])$ an, falls $X_a(\omega)$ überhaupt existiert.

a) $x[n] = -3 \cdot [n-3]$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n [n+2]$

c) $x[n] = n^2 a^{2n} [n] \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

d) $x[n] = \sum_{k=0} [n-3k]$

e) $x[n] = \cos\left(\frac{2}{5}n + \frac{4}{5}\right) [n+2]$

f) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n [n]$

Lösungen

a) i) $X(z) = -3 z^{-3} \frac{z}{z-1} = -3 z^{-3} \frac{1}{1-z^{-1}}$

ii) $|z| > 1$

iii) $X_a(\)$ existiert nicht

b) i) $X(z) = 16 z^2 \frac{z}{z - \frac{1}{4}} = 16 z^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$

ii) $|z| > \frac{1}{4}$

iii) $X_a(\) = 16e^{j2T} \frac{e^{jT}}{e^{jT} - \frac{1}{4}}$

c) i) $X(z) = \frac{a^2 z(z+a^2)}{(z-a^2)^3}$

ii) $|z| > a^2$

iii) $|a| < 1$: $X_a(\) = \frac{a^2 e^{jT} (e^{jT} + a^2)}{(e^{jT} - a^2)^3}$

$|a| = 1$: $X_a(\)$ existiert nicht

d) i) $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-3}}$

ii) $|z| > 1$

iii) $X_a(\)$ existiert nicht

e) i) $X(z) = z^2 \frac{1 - z^{-1} \cos\left(\frac{2}{5}\right)}{1 - 2 z^{-1} \cos\left(\frac{2}{5}\right) + z^{-2}}$

ii) $|z| > 1$

iii) $X_a(\)$ existiert nicht

f) i) $X(z) = \frac{2 - \frac{3}{4} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)} = \frac{2z^2 - \frac{3}{4} z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$

ii) $|z| > \frac{1}{2}$

iii) $X_a(\) = \frac{2 - \frac{3}{4} e^{-jT}}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-jT}\right)\left(1 - \frac{1}{4} e^{-jT}\right)} = \frac{2e^{j2T} - \frac{3}{4} e^{jT}}{\left(e^{jT} - \frac{1}{2}\right)\left(e^{jT} - \frac{1}{4}\right)}$