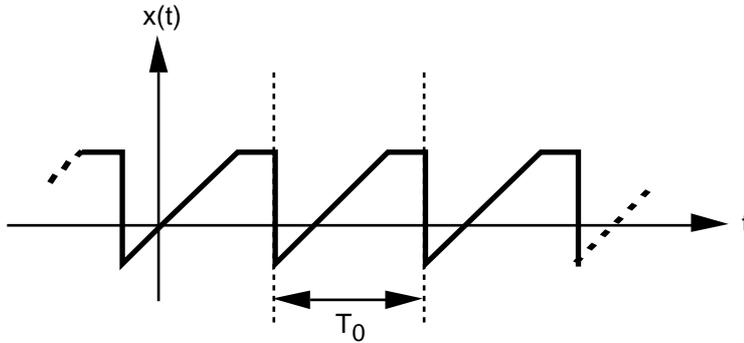


Fourier-Reihen: Einführung

Ausgangspunkt

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode T_0 bzw. Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$



Ziel

Darstellung von $x(t)$ als Linearkombination von trigonometrischen Funktionen bzw. Signalen $\cos(\omega_0 t)$, $\cos(2\omega_0 t)$, $\cos(3\omega_0 t)$, ..., $\sin(\omega_0 t)$, $\sin(2\omega_0 t)$, $\sin(3\omega_0 t)$, ...

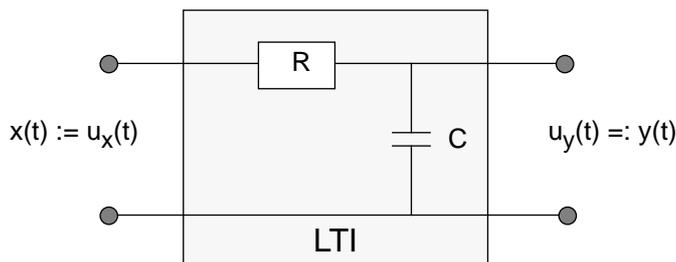
$$x(t) = a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \\ + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t))$$

Begründung

$x(t)$ sei ein an einem linearen System (LTI-System) angelegtes Eingangssignal, und es soll das dazugehörige Ausgangssignal $y(t)$ bestimmt werden.

Bsp.: Tiefpassfilter als LTI-System

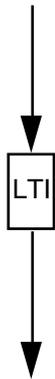


Es ist günstig, $x(t)$ in trigonometrische Teilsignale zu zerlegen. Trigonometrische Signale werden beim Durchgang durch das System nur in ihrer Amplitude und Phase verändert, nicht jedoch in ihrer Frequenz (Experiment).

$$\sin(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow A(\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t - \phi(\omega_0)) \\ \cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow A(\omega_0) \cdot \cos(\omega_0 t - \phi(\omega_0))$$

Das Ausgangssignal $y(t)$ ist wegen der Linearität des Systems eine Linearkombination der Ausgänge zu den einzelnen trigonometrischen Teilsignalen.

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t))$$



$$y(t) = a_0' + \sum_{k=1} (a_k' \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t - \varphi_k) + b_k' \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t - \varphi_k))$$

Verallgemeinerung der Idee der Fourier-Zerlegung

Ausgangspunkt

Beliebige Funktion bzw. beliebiges Signal $x(t)$

Ziel

Darstellung von $x(t)$ als Linearkombination von bestimmten Basisfunktionen bzw. Basissignalen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, ...

$$x(t) = \varphi_1 \cdot \varphi_1(t) + \varphi_2 \cdot \varphi_2(t) + \varphi_3 \cdot \varphi_3(t) + \dots$$

$$x(t) = \sum_{k=1} \varphi_k \cdot \varphi_k(t)$$

Begründung

Soll die Funktion $x(t)$ einer linearen Abbildung T unterzogen werden, so ist es günstig, $x(t)$ in Basisfunktionen $\varphi_k(t)$ zu zerlegen, die sich bezüglich der Abbildung T möglichst einfach verhalten.

Die Bildfunktion $x'(t)$ von $x(t)$ ist wegen der Linearität eine Linearkombination der Bildfunktionen $\varphi_k'(t)$ von $\varphi_k(t)$:

$$T: \quad \varphi_k(t) \quad \rightarrow \quad \varphi_k'(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=1} \varphi_k \cdot \varphi_k(t) \quad \rightarrow \quad x'(t) = \sum_{k=1} \varphi_k \cdot \varphi_k'(t)$$