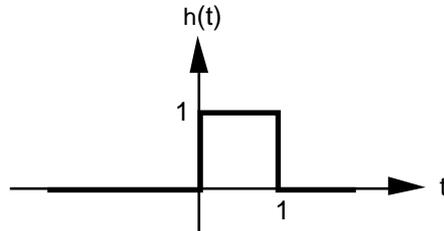


Repetitions-Übung 4 Fourier-Transformation

Aufgaben

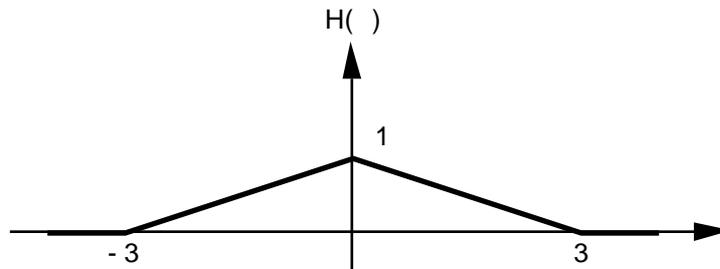
1. Gegeben ist der Graf der Einheitsimpuls-Übertragungsfunktion $h(t)$ eines LTI-Systems:



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und den Grafen des zum Eingangssignal $x(t) = \delta(t)$ gehörenden Ausgangssignals $y(t)$.

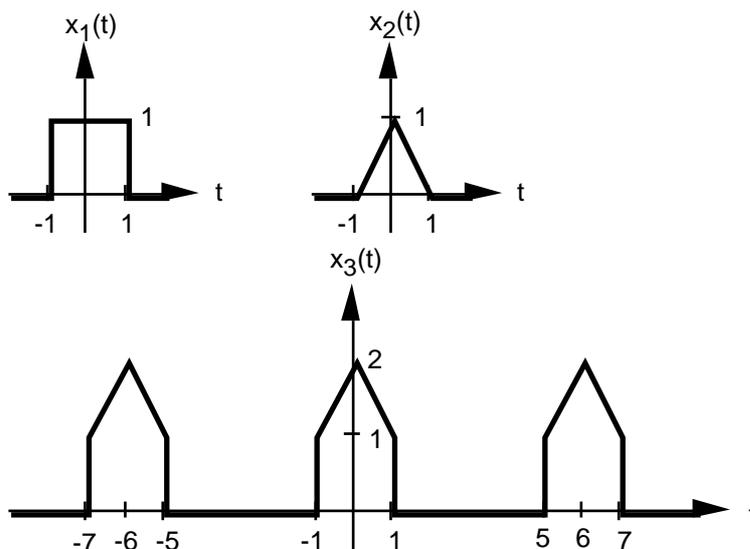
Allfällige Integrale müssen ohne Taschenrechner berechnet werden.

2. Gegeben ist der Graf des Frequenzganges $H(\omega)$ eines LTI-Systems:



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des zum Eingangssignal $x(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t)$ gehörenden Ausgangssignals $y(t)$.

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ sowie der periodischen Funktion $x_3(t)$:



Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ aus.

Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für $X_3(\omega)$ berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen $X_3(\omega)$ und den beiden bekannten Transformierten $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ angeben.

4. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1 < t < 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20 \cdot t) + 2 \cdot \cos(40 \cdot t)$$

Nun wird das Produkt $x(t) := x_1(t) \cdot x_2(t)$ gebildet.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$, und zeichnen Sie den Grafen von $X(\omega)$.

Aus Ihrer grafischen Darstellung von $X(\omega)$ sollte man die Funktionsgleichung von $X(\omega)$ herauslesen können.

5. Von einem LTI-System kennt man einen Input $x_1(t)$ und den dazugehörigen Output $y_1(t)$:

$$x_1(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

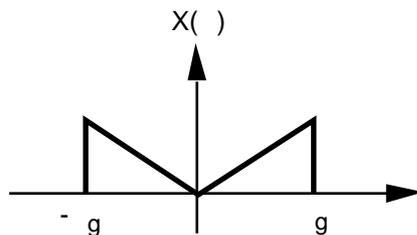
$$y_1(t) = e^{-2(t-1)} \cdot u(t-1)$$

Bestimmen Sie den Output $y_2(t)$, welcher zum folgenden Input $x_2(t)$ gehört:

$$x_2(t) = u(t-3)$$

6. Ein Modulator bildet das Produkt von zwei Zeitsignalen, dem Nachrichtensignal $x(t)$ und dem Trägersignal $s(t)$. Das Produkt $y(t) = x(t) \cdot s(t)$ ist das modulierte Signal.

Das Nachrichtensignal habe das folgende Spektrum:

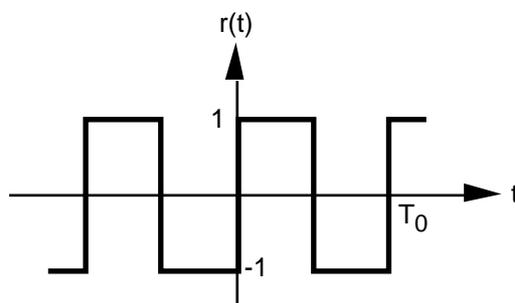


Skizzieren Sie das Fourierspektrum $Y(\omega)$ des modulierten Signals für die drei Fälle a), b) und c).

a) $s(t) = K \cos(\omega_0 t)$

b) $s(t) = K \sin(\omega_0 t)$

c) $r(t)$

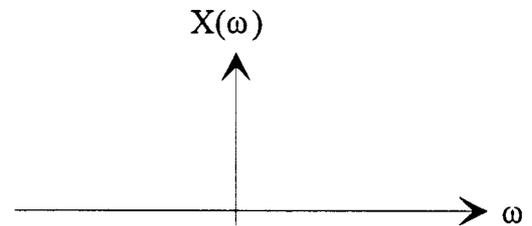
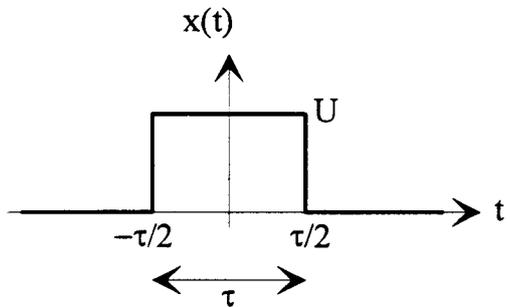


Annahme: Es gelte jeweils $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \gg g$

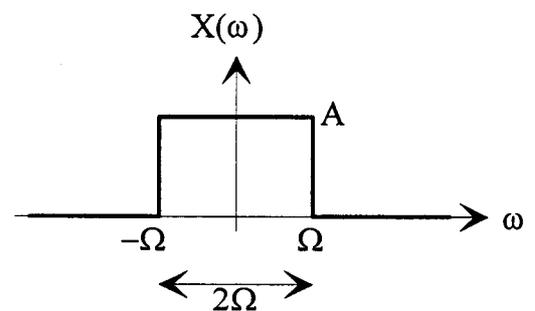
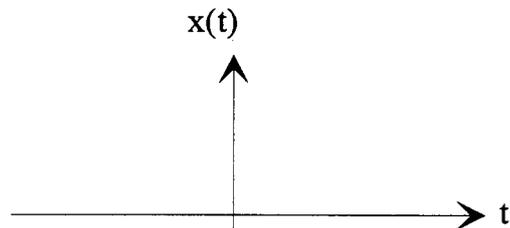
7. Gegeben ist entweder das Zeitsignal $x(t)$ oder dessen Spektrum $X(\omega)$.

Bestimmen Sie das Spektrum $X(\omega)$ (bei gegebenem $x(t)$) bzw. das Zeitsignal $x(t)$ (bei gegebenem Spektrum $X(\omega)$), und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $X(\omega)$ bzw. $x(t)$.

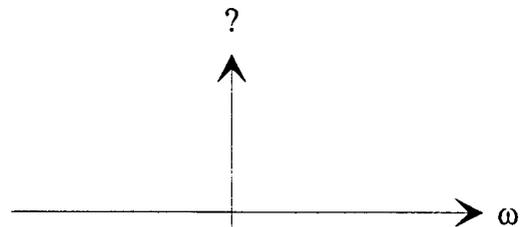
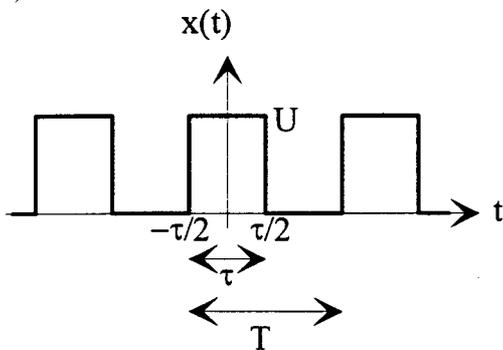
a)



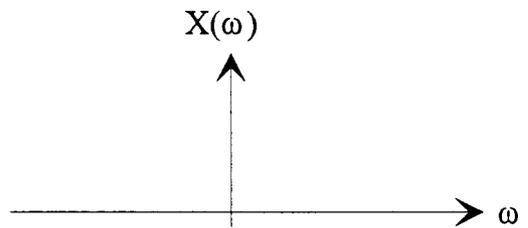
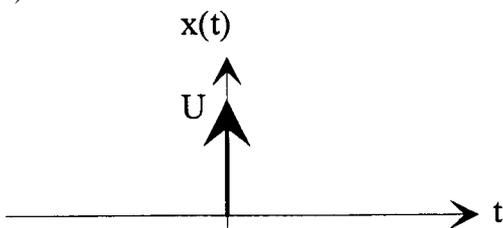
b)



c)

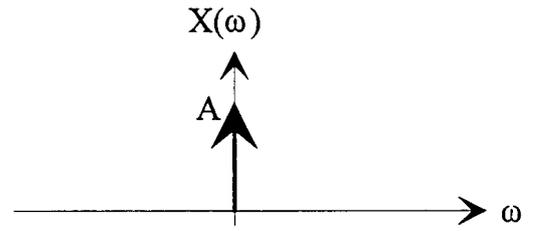
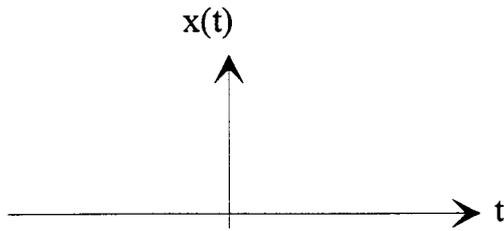


d)

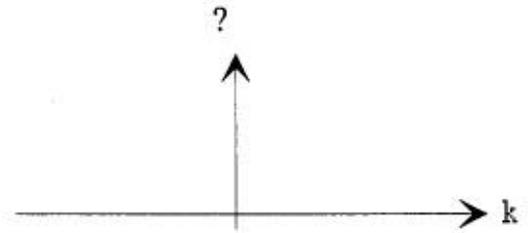
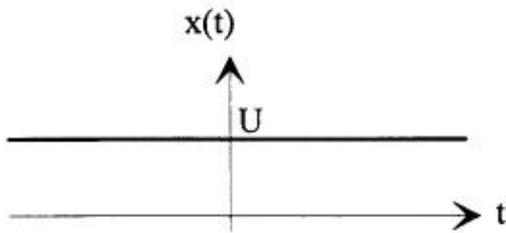


$$x(t) = U \cdot \delta(t)$$

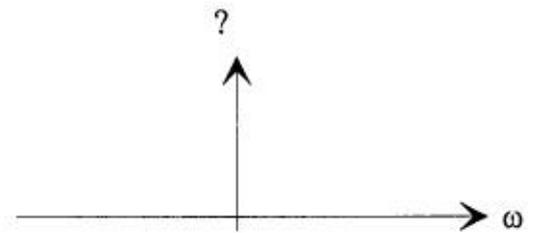
e)



f)

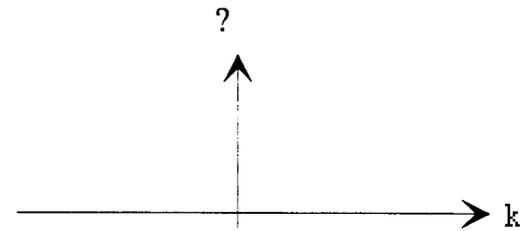
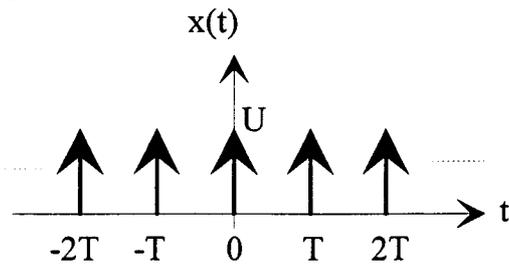


Darstellung als Fourierreihe

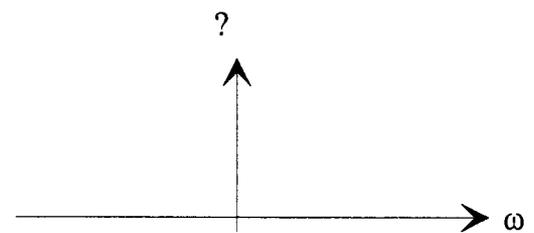


Darstellung als Fouriertransformierte

g)



Darstellung als Fourierreihe



Darstellung als Fouriertransformierte

Lösungen

1.
$$y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (0 < t < 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$$

2.
$$y(t) = \frac{2}{3} \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(2t)$$

3.
$$X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} X_1\left(\omega - k\frac{2\pi}{3}\right) + X_2\left(\omega - k\frac{2\pi}{3}\right)$$

4. ...

5.
$$y_2(t) = (t-4) - e^{-2(t-4)} \quad (t > 4)$$

6. a) ...
b) ...
c) ...

7. a)
$$X(\omega) = \frac{U \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}}{U} \quad (\omega \neq 0) = U \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

b)
$$x(t) = \frac{A \frac{\sin(\pi t)}{t}}{A} \quad (t \neq 0) = \frac{A}{\pi} \operatorname{sinc}(\pi t)$$

c)
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2U}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2} - k\right) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$$

d)
$$X(\omega) = U$$

e)
$$x(t) = \frac{A}{2}$$

f) Fourier-Reihe: $c_0 = U, c_k = 0 \quad (k \neq 0)$
Fourier-Transformierte: $X(\omega) = 2U \delta(\omega)$

g) Fourier-Reihe: $c_k = \frac{U}{T} \delta(k - Z)$

Fourier-Transformierte: $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2U}{T} \delta(\omega - k\omega_0) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$