

## Aufgaben 9      Exponentialfunktion und -gleichungen Zinseszins, Exponentialfunktion

### Lernziele

- das zukünftige Kapital berechnen können, das zu einem festen jährlichen Zinssatz mit Zins und Zinseszins angelegt wird.
- Zinseszinsaufgaben bearbeiten können.
- eine Exponentialfunktion bei vorgegebener Funktionsgleichung grafisch darstellen können.
- die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion aus drei Punkten, die auf dem Grafen der Funktion liegen, bestimmen können.
- angewandte Problemstellungen mit Hilfe der Exponentialfunktion bearbeiten können.

### Aufgaben

- 9.1 Ein Anfangskapital  $K_0$  ist zum jährlichen Zinssatz  $p$  mit Zinseszins angelegt.
- Das Anfangskapital sei  $K_0 = 1000.00$  CHF und der jährliche Zinssatz  $p = 2\%$ . Bestimmen Sie das Kapital nach einem, zwei, drei, vier und fünf Jahr(en).
  - Versuchen Sie, eine Formel herzuleiten, die es Ihnen erlaubt, das Kapital  $K_n$  nach  $n$  Jahren zu berechnen für beliebige Werte von  $K_0$ ,  $p$  und  $n$ .
- 9.2 Welches ist das zukünftige Kapital, wenn 8000 CHF 10 Jahre lang mit Zins und Zinseszins investiert werden zu einem jährlichen Zinssatz von 12%?
- 9.3 Welches Anfangskapital beträgt nach 10 Jahren 10'000 CHF, wenn es mit Zins und Zinseszins zu einem jährlichen Zinssatz von 6% angelegt wird?
- 9.4 Zu welchem jährlichen Zinssatz müssten 10'000 CHF mit Zins und Zinseszins angelegt werden, damit das Kapital nach 7 Jahren 14'071 CHF betragen würde?
- 9.5 Frau Schmid möchte 150'000 CHF 5 Jahre lang anlegen. Die Bank A offeriert ihr einen jährlichen Zinssatz von 6.5% bei Zins und Zinseszins. Die Bank B bietet an, nach 5 Jahren 200'000 CHF zu zahlen. Welche Bank macht das bessere Angebot?
- 9.6 Der Kauf von Alaska kostete die USA 7 Millionen \$ im Jahre 1869. Angenommen, dieses Geld wäre damals in ein Sparkonto einbezahlt worden, welches Zins und Zinseszins bei einem jährlichen Zinssatz von 6% getragen hätte. Wieviel Geld wäre bei dieser Investition im Jahre 2010 verfügbar?
- 9.7 Maria Stähli investierte 2500 CHF in eine 36-Monate-Anlage, welche einen einfachen Zins von jährlich 8.5% trug. Als die Anlage auslief, investierte sie die ganze Summe in einen Fond, der einem jährlichen Wachstum von 18% (bei Zins und Zinseszins) entsprach. Wieviel war dieser Fond wert nach 9 Jahren?
- 9.8 Ein Kapital wird 4 Jahre lang zu 4% und 3 weitere Jahre lang zu 6% angelegt (jeweils Jahreszinssatz, Zins und Zinseszins). Am Ende beträgt das Kapital 72'000 CHF.
- Bestimmen Sie das Anfangskapital.
  - Wie hoch ist der durchschnittliche Zinssatz bezüglich der ganzen Zeitperiode?

- 9.9 Ein unbekanntes Anfangskapital wird zu einem unbekanntem jährlichen Zinssatz mit Zins und Zinseszins angelegt. Nach zwei Jahren beträgt das Kapital 5'891.74 und nach 5 weiteren Jahren 6'997.54 CHF. Bestimmen Sie sowohl das Anfangskapital als auch den Zinssatz.
- 9.10 Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Exponentialfunktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem:
- $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \quad y = f_1(x) = 2^x$
- $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \quad y = f_2(x) = 0.2^x$
- $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \quad y = f_3(x) = 3 \cdot 0.5^x$
- $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \quad y = f_4(x) = -2 \cdot 3^x$
- 9.11 Der Graf einer Exponentialfunktion enthält die Punkte P und Q. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion.
- a) P (0 | 1.02)      Q (1 | 1.0302)
- b) P (1 | 12)      Q (3 | 192)
- c) P (0 | 10'000)      Q (5 | 77.76)
- d) P (5 | 16)      Q (9 | 1/16)
- 9.12 Der Wert eines Hauses, welches vor 20 Jahren \$160'000 gekostet hat, ist wegen der Inflation jedes Jahr um 4% gestiegen. Wieviel kostet es heute?
- 9.13 Angenommen, ein Land habe 20 Millionen Einwohner und rechnet für die nächsten 20 Jahre mit einem Bevölkerungswachstum von jährlich 2%. Wie gross wird die Bevölkerung dieses Landes in 10 Jahren sein?
- 9.14 Ein Ball wird aus 12.8 Metern Höhe fallengelassen. Bei jedem Aufprall auf dem Boden steigt der Ball auf  $\frac{3}{4}$  der vorherigen Höhe auf. Wie hoch steigt der Ball nach dem vierten Abprall vom Boden?
- 9.15 Der Wert einer Maschine wird auf \$10'000 geschätzt. Die Entwertung beträgt jährlich 20%. Bestimmen Sie den Wert der Maschine nach 4 Jahren.
- 9.16 Die Grösse einer bestimmten Bakterienkultur wächst exponentiell. Um 8 Uhr betrug die Anzahl Bakterien 2'300, um 11 Uhr 18'400. Bestimmen Sie die Anzahl Bakterien um 13.30 Uhr
- 9.17 In einem physikalischen Experiment nimmt die Anzahl radioaktiver Atomkerne in einem bestimmten Präparat exponentiell ab. 5 Stunden nach Beginn des Experimentes wurden  $1.56 \cdot 10^{16}$  Atomkerne gezählt. 3 Stunden später ist die Anzahl auf  $3.05 \cdot 10^{13}$  gefallen. Wieviele Atomkerne hatte es zu Beginn des Experimentes?
- 9.18 Ein Kapital wird mit Zins und Zinseszins angelegt. Bei welchem jährlichen Zinssatz verdoppelt sich das Kapital in 20 Jahren?

### Lösungen

9.1 a)  $K_0 = 1000.00 \text{ CHF}$        $K_1 = 1020.00 \text{ CHF}$        $K_2 = 1040.40 \text{ CHF}$   
 $K_3 = 1061.21 \text{ CHF}$        $K_4 = 1082.43 \text{ CHF}$        $K_5 = 1104.08 \text{ CHF}$

b)  $K_n = K_0 (1 + p)^n$

9.2  $K_{10} = 24'846.79 \text{ CHF}$

9.3  $K_0 = 5'583.95 \text{ CHF}$

9.4  $p = 5\%$

9.5 Bank A:  $K(5) = 205'513.00 \text{ CHF}$   
Bank B:  $K(5) = 200'000.00 \text{ CHF}$

9.6  $K_{141} = 25'896 \text{ Millionen \$ (gerundet)}$

9.7  $13'916.24 \text{ CHF}$

9.8 a)  $K_0 = 51'675 \text{ CHF}$       b)  $p = 4.85\%$

9.9  $p = 3.5\%$ ,  $K_0 = 5'500.00 \text{ CHF}$

9.10 ...

9.11 a)  $y = f(x) = 1.02 \cdot 1.01^x$       b)  $y = f(x) = 3 \cdot 4^x$   
c)  $y = f(x) = 10'000 \cdot 0.6^x$       d)  $y = f(x) = 16'384 \cdot 0.25^x$

9.12  $\$350'850 \text{ (gerundet)}$

9.13  $24.4 \text{ Millionen (gerundet)}$

9.14  $4.05 \text{ Meter}$

9.15  $\$4'096$

9.16  $104'086$

9.17  $5.10 \cdot 10^{20}$

9.18  $p = \sqrt[20]{2} - 1 = 3.5\% \text{ (gerundet)}$