

Aufgaben 3 Funktion Definitionsbereich, Zielbereich, Wertebereich, Graf

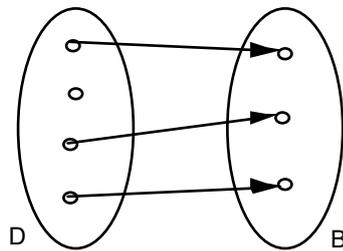
Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Relation eine Funktion ist.
- den Wertebereich einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.

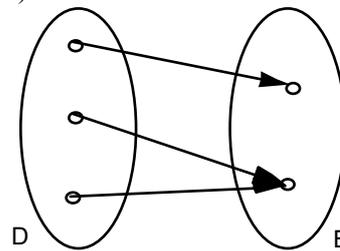
Aufgaben

3.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion ist.

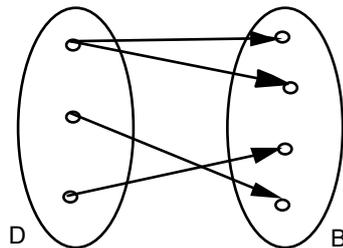
a)



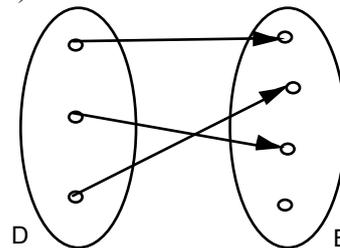
b)



c)



d)



e) $D =$ Menge aller Module des FHGR-Tourismus-Bachelor-Studiums
 $B =$ Menge aller FHGR-Dozierenden
 $f: D \rightarrow B, m \mapsto d = f(m) =$ Dozierende(r) im Modul m

f) $D = \{1989, 1990, \dots, 1998, 1999\}$
 $B =$ Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
 $f: D \rightarrow B, j \mapsto m = f(j) =$ Mensch mit Jahrgang j

g) $D =$ Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen
 $B = \{1989, 1990, \dots, 1998, 1999\}$
 $f: D \rightarrow B, m \mapsto j = f(m) =$ Jahrgang des Menschen m

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^2$

i) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) =$ Zahl, welche quadriert gleich x ergibt

Hinweis:

- \mathbb{R}^+ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen, d.h. $\mathbb{R}^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0\}$.

j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto b = f(t) =$ Bankkontostand zum Zeitpunkt t

3.2 (siehe nächste Seite)

3.2 Bestimmen Sie den Bildbereich W der folgenden Funktionen:

- a) $D = \{\text{Januar, Februar, März, ..., Dezember}\}$
 $B = \{A, B, C, ..., Z\}$
 $f: D \rightarrow B, m \mapsto b = f(m) = \text{Anfangsbuchstabe des Monats } m$
- b) $D = \text{Menge aller Nachbarländer der Schweiz}$
 $B = \text{Menge aller europäischer Städte}$
 $h: D \rightarrow B, x \mapsto y = h(x) = \text{Hauptstadt/-ort des Nachbarlandes } x$
- c) Funktion f in der Aufgabe 3.1 g)
- d) Funktion f in der Aufgabe 3.1 h)

3.3 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 - x$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

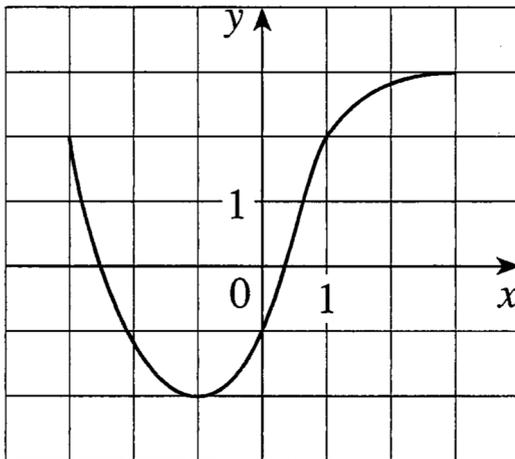
- i) $f(1)$ ii) $f(-2)$ iii) $f(a)$
- iv) $f(b^2)$ v) $f(a - b)$ vi) $f(x^3 - x)$

b) $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

- i) $g(2)$ ii) $g(-3)$ iii) $g(a)$
- iv) $g(b^2)$ v) $g(a - b)$ vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

3.4 Gegeben ist der Graf einer Funktion f :



- a) Geben Sie den Funktionswert $f(-1)$ an.
- b) Schätzen Sie den Funktionswert $f(2)$ ab.
- c) Für welche Werte von x ist $f(x) = 2$?
- d) Schätzen Sie alle Werte für x ab, so dass gilt: $f(x) = 0$.
- e) Geben Sie den Definitionsbereich D von f an.
- f) Geben Sie den Wertebereich W von f an.

3.5 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Der Wertebereich W der Funktion $f: \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x - 4}$, ist die Menge ...

- ... $\{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\}$
- ... $\{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } y \geq 4\}$
- ... \mathbb{R}
- ... \mathbb{R}_0^+

b) f kann keine Funktion sein, falls ...

- ... der Definitionsbereich von f keine Zahlenmenge ist.
- ... der Zielbereich von f mehr Elemente enthält als der Definitionsbereich von f .
- ... der Definitionsbereich von f mehr Elemente enthält als der Zielbereich von f .
- ... mindestens ein Element der Definitionsmenge mehr als ein Bildelement hat.

c) Wenn bei einer Funktion f für alle Elemente x des Definitionsbereichs $f(x) = x$ gilt, dann kann man folgern, dass ...

- ... der Definitionsbereich von f die gleiche Menge ist wie der Zielbereich von f .
- ... der Wertebereich von f die gleiche Menge ist wie der Zielbereich von f .
- ... der Definitionsbereich von f gleich viele Elemente enthält wie der Zielbereich von f .
- ... der Definitionsbereich von f gleich viele Elemente enthält wie der Wertebereich von f .

Lösungen

- 3.1 a) keine Funktion
 Einem Element von D wird kein Element (statt genau ein Element) von B zugeordnet.
- b) Funktion
- c) keine Funktion
 Einem Element von D werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von B zugeordnet.
- d) Funktion
- e) keine Funktion
 Einigen Elementen von D werden zwei oder mehr Elemente (statt genau ein Element) von B zugeordnet.
- f) keine Funktion
 Jedem Element von D werden viele Elemente (statt genau ein Element) von B zugeordnet.
- g) Funktion
- h) Funktion
- i) keine Funktion
 Jedem Element von \mathbb{R}^+ werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von \mathbb{R} zugeordnet.
- j) Funktion

- 3.2 a) $W = \{A, D, F, J, M, N, O, S\}$
- b) $W = \{\text{Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}\}$
- c) $W = B$
- d) $W = \mathbb{R}_0^+$

Hinweis:

- \mathbb{R}_0^+ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen inkl. Null, d.h. $\mathbb{R}_0^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

- 3.3 a) i) $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
- ii) $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$
- iii) $f(a) = a^3 - a$
- iv) $f(b^2) = (b^2)^3 - b^2 = b^6 - b^2$
- v) $f(a - b) = (a - b)^3 - (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$
- vi) $f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

- b) i) $g(2) = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$
- ii) $g(-3) = \frac{(-3)^2}{-3+1} = -\frac{9}{2}$
- iii) $g(a) = \frac{a^2}{a+1}$
- iv) $g(b^2) = \frac{(b^2)^2}{b^2+1} = \frac{b^4}{b^2+1}$
- v) $g(a - b) = \frac{(a-b)^2}{(a-b)+1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b + 1}$
- vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)+1} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

- 3.4
- a) $f(-1) = -2$
 - b) $f(2) \approx 2.8$
 - c) $x_1 = -3, x_2 = 1$
 - d) $x_1 \approx -2.5, x_2 \approx 0.3$
 - e) $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$
 - f) $W = \{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } -2 \leq y \leq 3\} = [-2, 3]$
- 3.5
- a) 4. Aussage
 - b) 4. Aussage
 - c) 4. Aussage